Diversidade Representacional e teoremas-em-ação: um estudo de caso a respeito da construção de conhecimento de um estudante no campo conceitual vetorial

Representational diversity and theorems-in-action: a case study on the construction of a student's knowledge in the conceptual vector field

Keila Tatiana Boni
UEL – Universidade Estadual de Londrina[1]/ UNOPAR – Universidade Norte do Paraná
keilaboni@hotmail.com

Carlos Eduardo Laburú[2]
UEL – Universidade Estadual de Londrina
laburu@uel.br

Resumo

Este trabalho relata alguns aspectos de uma investigação mais ampla que objetiva evidenciar que invariantes operatórios, do tipo teoremas-em-ação, são modificados por um estudante durante a construção de seus conhecimentos no estudo de Vetores quando se promove um ensino numa perspectiva da Diversidade Representacional. A partir da análise de dados, que foram coletados por meio da aplicação de questionários e de gravação em vídeo de uma aula ministrada a um estudante de Engenharia Elétrica, sendo os procedimentos analíticos realizados com base em estudos sobre a Teoria dos Campos Conceituais e a Diversidade Representacional, foi possível identificar as atribuições de se promover um ensino integrando multimodos e múltiplas representações por estes possibilitarem ao estudante meios para manifestar teoremas-em-ação, o que é essencial para que o professor acompanhe a construção de seus conhecimentos, bem como por auxiliar o estudante a modificar seus teoremas-em-ação falsos em verdadeiros.

Palavras chave: educação matemática e científica, vetores, diversidade representacional, teoremas-em-ação.

Abstract

This work reports some aspects of a broader investigation that aims to show that operative invariants, theorems-in-action, are modified by a student during the construction of their knowledge in the study of Vectors when promoting a teaching from a perspective of Representational Diversity. From the analysis of data that were collected through the

[1] Doutoranda do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, UEL-PR.

[2] Bolsista CNPq (processo 302281/2015-0).

application of questionnaires and video recording of a lecture given to a student of Electrical Engineering, the analytical procedures being carried out based on studies on Conceptual Field Theory and Representational Diversity , It was possible to identify the attributions of promoting a teaching integrating multimode and multiple representations by these to enable the student means to manifest theorems-in-action, which is essential for the teacher to accompany the construction of their knowledge, as well as to help the Student to modify his false theorems into true ones.

Key words: mathematical and scientific education, vectors, representational diversity, theorems-in-action.

Introdução

A Física normalmente necessita da Matemática para ser expressada, pois o discurso científico comumente ocorre por meio de elementos matemáticos como equações, gráficos e vetores. Considerando que a Matemática é muito mais que uma ferramenta, mas é a linguagem que permite a estruturação do pensamento físico, é necessário que o ensino científico propicie meios para que os estudantes adquiram a habilidade de valer-se de conhecimentos matemáticos para apreender o mundo (PIETROCOLA, 2002). Dentre os elementos matemáticos que estruturam o discurso científico, destacamos no presente estudo a linguagem vetorial na estruturação do conceito físico de Força Resultante. De acordo com Pietrocola (2002), a partir do momento em que se atribui a grandeza vetorial para o conceito físico de Força, passa-se a submeter tal conceito à todas as regras da linguagem vetorial.

Considerando a intrínseca relação entre Matemática e Física no ensino e na aprendizagem do conceito de força, apresentamos o recorte de uma investigação mais abrangente que tem por objetivo evidenciar que invariantes operatórios, do tipo teoremas-em-ação, são modificados por estudantes durante a construção de seus conhecimentos no estudo de Vetores quando se promove um ensino numa perspectiva da Diversidade Representacional. A investigação relatada embasa-se na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990, 2009) e em alguns referenciais da Diversidade Representacional (LABURÚ; SILVA, 2011; LABURÚ; BARROS; SILVA, 2011; DUVAL, 2012; RADFORD ET AL, 2009).

De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, muito mais do que saber fazer, é preciso que o estudante saiba expressar os conhecimentos que estão sendo construídos, porém, nem sempre essa expressão é totalmente manifestada por meio da fala ou da escrita, mas é possível que um observador externo infira indícios dos conhecimentos que estão sendo construídos pelo estudante por meio de diversas representações (VERGNAUD, 2009). Partindo do pressuposto de que tanto o processo de pensamento matemático, quanto de pensamento físico são dependentes da sinergia cognitiva de diversificadas formas e modos representacionais (LABURÚ; BARROS; SILVA, 2011), defendemos que um ensino que reconhece a essencialidade de valorizar e integrar a combinação de representações diversas constitui um mecanismo pedagógico que, por um lado, oferece procedimentos diversos de interpretação e entendimento (LABURÚ; SILVA, 2011) e, por outro lado, oportuniza ao professor acompanhar o aprendizado em construção pelo estudante.

A Teoria dos Campos Conceituais e a Diversidade Representacional

Vergnaud (1990, 2009) em sua Teoria dos Campos Conceituais destaca a conceitualização como o problema central da cognição, sendo que as ações do estudante, como quando resolve um problema matemático ou físico, estão sujeitas às hipóteses, analogias e metáforas que são dependentes da conceitualização (GRECA; MOREIRA, 2003). Nesse direcionamento, Vergnaud (1990) defende que o conhecimento está organizado em campos conceituais, e que a apropriação deste por parte do sujeito demanda tempo e contato com situações progressivamente mais complexas e com representações simbólicas inter-relacionadas. Assim, para que ocorra essa apropriação do campo conceitual pelo sujeito, ele precisa ser submetido ao confronto com situações (tarefas) diversas. Para determinada classe de situações, o sujeito engendra esquemas, ou seja, organizações invariantes do comportamento que são constituídos por objetivo, regras de ação e controle, invariantes operatórios e inferência. Dentre esses elementos constituintes do esquema, Vergnaud enfatiza os invariantes operatórios, formados por teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, por serem indispensáveis na articulação entre situação e esquema. Os conceitos-em-ação permitem que o sujeito identifique elementos conhecidos nas situações, enquanto que os teoremas-em-ação fornecem as regras que permitirão vincular tais elementos e agir sobre a situação. Portanto, os invariantes operatórios são responsáveis pela ação do sujeito ao enfrentar uma situação que pode ser, por exemplo, a resolução de um problema matemático ou físico, porém, essa ação pode ser ou não apropriada segundo algum critério teórico ou científico, podendo conduzir o sujeito tanto ao êxito, quanto ao fracasso.

A partir do exposto, podemos compreender, no contexto educacional, que a identificação de invariantes operatórios é essencial para que o professor acompanhe a construção de conhecimentos do estudante e, assim, reoriente sua prática pedagógica. Contudo, nem sempre o estudante expressa com facilidade seus conhecimentos-em-ação utilizados ao lidar com uma situação. Diante desse problema, defendemos, tal como Greca e Moreira (2003), que é necessário que o ensino tenha por objetivo buscar meios de proporcionar ao estudante ferramentas para construir invariantes operatórios explícitos, o que pode ser possível a partir de sistemas semióticos (palavras, textos, gráficos, diagramas, álgebra, etc). Nesse direcionamento, em Duval (2012) encontramos a defesa de que os registros de representação semiótica constituem um meio de exteriorizar as representações mentais, tornando-as acessíveis a outrem, e ressalta que “as representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento” (DUVAL, 2012, p. 270).

Uma das defesas na Diversidade Representacional é de que nenhuma significação é completa por si própria, mas depende de muitas fontes de informação distintas e de domínios contextuais, uma vez que as diferentes circunstâncias beneficiam as diversas mensagens admissíveis de um sinal (LABURÚ; SILVA, 2011), afirmação essa que condiz com a defesa da Teoria dos Campos Conceituais sobre as atribuições das situações e representações simbólicas. Logo, a Diversidade Representacional refere-se a “*recursos perceptivos”* (RADFORD ET AL, 2009) e que é por meio deles que diversas formas representacionais podem ser pensadas, expressadas, comunicadas ou executadas, defesa que converge com a Teoria dos Campos Conceituais. Dentre esses recursos perceptivos temos os descritivos (verbal, gráfica, tabular, diagramática, matemática), os figurativos (pictórica, analógica ou metafórica), os cinestésicos ou de gestos corporais (encenação, jogos), os que utilizam objetos tridimensionais (3D), os experimentais ou maquetes (LABURÚ; SILVA, 2011).

Encontramos, ainda, na Diversidade Representacional, que a compreensão do estudante em ciências e matemática não se limita a uma única forma ou modo representacional, referente a um determinado tópico ou conceito, mas depende da atividade cognitiva de conversão entre registros de representação (DUVAL, 2012) e da tradução e integração de modos representacionais (LABURÚ; SILVA, 2011; LABURÚ; BARROS; SILVA, 2011), o que permite ao estudante apurar significações daquilo que é representado e explicitar novas significações.

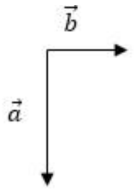
Procedimentos metodológicos e análise das informações coletadas

Este trabalho, de cunho qualitativo, corresponde a um recorte de uma investigação mais abrangente que tem por intuito evidenciar que invariantes operatórios, do tipo teoremas-em-ação, são modificados por estudantes durante a construção de seus conhecimentos no estudo de Vetores quando se promove um ensino numa perspectiva da Diversidade Representacional.

Os dados utilizados no atual recorte foram obtidos a partir de três momentos com um estudante do 3º semestre de Engenharia Elétrica de uma instituição particular de ensino do norte do Paraná. No primeiro momento foi aplicado ao estudante um questionário diagnóstico, contemplando questões sobre adição vetorial em dois contextos: matemático e físico (Força Resultante). Neste trabalho, apresentamos apenas os itens c das questões 2 e 3 desse questionário (ver Figura 1), para os quais adotaremos, respectivamente, as referências 2C e 3C. Vale ressaltar que, até então, o estudante não havia cursado as disciplinas de Física (Mecânica) e de Geometria Analítica e Álgebra Vetorial e, portanto, suas respostas ao questionário foram embasadas em conhecimentos construídos durante o Ensino Médio e em seu senso comum. No segundo momento, a primeira autora deste trabalho, à qual nos referiremos como “professora”, ministrou uma aula sobre adição vetorial na perspectiva da Diversidade Representacional, abordando o tema a partir de desenhos, esquemas, vídeos, entre outros, utilizados com o intuito de “descontruir” falsos teoremas-em-ação manifestados pelo estudante no questionário e durante a aula, objetivando, dessa forma, conduzir o estudante à compreensão matemática e científica do assunto. Por fim, no terceiro momento, um questionário idêntico ao do primeiro (ver Figura 1) foi aplicado, porém, com caráter avaliativo.

2) Faça o cálculo vetorial considerando $\vec{a}$ $(a = 4u)$ e $\vec{b}$ $(b = 3u)$:

c)



3) Em cada situação a seguir, determine a intensidade da força resultante, a direção e o sentido do movimento (despreze a ação de outras força):

c)

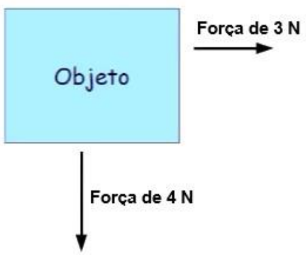


Figura 1: Algumas das questões propostas no questionário aplicado ao estudante no primeiro e no terceiro momento da investigação.

No primeiro momento, para a questão 2C, o estudante realizou a adição dos módulos dos vetores, conforme mostra a figura a seguir:

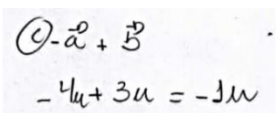


Figura 2: Resolução apresentada pelo estudante no primeiro momento da pesquisa, para a questão 2C

Com a resolução apresentada, inferimos que o estudante desconsiderou a disposição dos vetores, porém, não totalmente, atribuindo ao vetor $\vec{a}$ sinal negativo ao valor de seu módulo e mantendo o módulo do vetor $\vec{b}$ positivo. Com a análise de outras questões do mesmo questionário aplicado e após conversa com o estudante, concluímos que essa ação estava associada aos eixos do plano cartesiano, em que o estudante associou o vetor $\vec{a}$ ao eixo das ordenadas (y) no sentido negativo e, o vetor $\vec{b}$, ao eixo das abscissas (x) no sentido positivo. Para essa resolução inferimos que o estudante manifestou o teorema-em-ação falso para a situação: T1 - "*O cálculo entre os dois vetores apresentados consiste na adição de suas magnitudes, considerando seus sinais conforme disposição dos vetores, associados ao plano cartesiano*". Para a resolução da questão 3C, inferimos que o estudante manifestou o mesmo teorema-em-ação.

Após a aplicação e a análise do questionário diagnóstico, no outro dia deu-se início ao momento de intervenção a partir de uma aula sobre adição vetorial ministrada pela primeira autora. Essa aula foi ministrada nas perspectivas dos dois referenciais estudados: na Teoria dos Campos Conceituais e na Diversidade Representacional. Na Teoria dos Campos Conceituais porque a aula foi ministrada considerando o que é defendido como *situação*, propondo diversificadas tarefas progressivamente mais complexas sobre um mesmo referente. Tais situações foram propostas à luz da Diversidade Representacional por envolver diversos modos e formas representacionais, dentre eles o verbal (oral e escrito), desenhos, gestos e registro algébrico.

A aula teve início com a definição de vetor, fazendo uso de diversas ilustrações para diferenciar sentido e direção. Em seguida, abordou-se sobre adição vetorial pelo método do polígono e pelo método do paralelogramo, sendo as explicações da professora auxiliadas por desenhos e esquemas de vetores construídos por ela. Após as explicações, a professora retomou as abordagens realizadas utilizando um recurso computacional. Esse recurso é uma animação em *flash*, disponibilizada gratuitamente pela Universidade Federal de Mato Grosso.

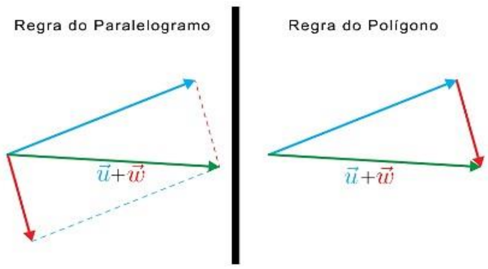


Figura 3: Captura do momento final em que a animação em flash mostra a comparação e a equivalência entre os dois métodos. Disponível em: <http://fisica.ufmt.br/nuvem/?p=1277> Acesso em: 29 dez. 2016.

Conforme observa-se na figura 3, com a animação em *flash* é possível visualizar que os métodos do polígono e do paralelogramo são equivalentes.

No início da aula, ao adicionar dois vetores, o estudante apresentou como resultado a simples adição de suas magnitudes, conforme observa-se na figura 2. Durante a aula, o estudante foi construindo conhecimento sobre como realizar a adição vetorial, conforme mostra a transcrição de um trecho da aula e a resolução apresentada pelo estudante:

> **Professora**: *Vamos supor um vetor $\vec{x}$ de tamanho ou módulo 3u e um vetor $\vec{y}$ de tamanho 4u. Como somamos os dois?*
> **Estudante**: *É para somar os dois? 3 + 4?*
> **Professora**: *Será? Faça o desenho.*
> Após fazer o desenho:
> **Estudante**: *Aqui tem que fazer o cálculo vetorial... cateto oposto, hipotenusa...*

Professora: *E por que você acha que tem que fazer isso?*
Estudante: *Cateto, hipotenusa* (ele indica no desenho que fez*)... tem um ângulo de 90°. Não é?*

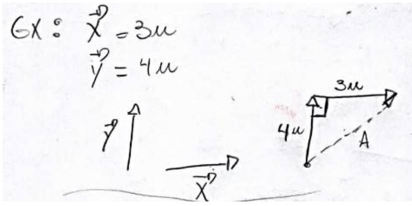


Figura 4: Resolução apresentada pelo estudante

Nesse momento, evidenciamos que o estudante modificou seu teorema-em-ação T1, que estava errado, para o teorema-em-ação correto: T2 - *"Para determinar o módulo do vetor soma ($\vec{s}$) ou resultante ($\vec{R}$) na adição de vetores ortogonais ($\theta = 90°$) aplica-se o teorema de Pitágoras:* $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$*"*.

Apesar do estudante ter realizado o cálculo corretamente, a professora evidenciou pelo desenho que a adição, pelo método do polígono, não foi realizada exatamente como foi pedido, ou seja, ao invés de adicionar $\vec{x}$ e $\vec{y}$, nessa ordem, o estudante desenhou os vetores como se estivesse somando $\vec{y}$ e $\vec{x}$. Esse momento foi oportuno para discutir sobre as propriedades de associatividade e de comutatividade da adição vetorial. Ainda, evidenciou-se a manifestação de um conceito equivocado, conforme observa-se na transcrição a seguir:

Professora: E se aqui não fosse 90°, daria o mesmo valor?
Estudante: *Não.* [...] *Depende, se fosse um ângulo maior iria dar um número maior.*

Diante desse argumento do estudante, inferimos o teorema-em-ação falso: T3 - *"O módulo do vetor soma ($\vec{s}$) ou resultante ($\vec{R}$) é diretamente proporcional ao ângulo formado entre dois vetores"*.

Para descontruir esse teorema-em-ação falso, e, ao mesmo tempo, para reforçar as abordagens realizadas sobre adição vetorial, a professora recorreu a um vídeo, que mostra e explica um experimento com dois dinamômetros, com uma força de 2 N cada, porém, em duas situações distintas: primeiro, considerando um ângulo agudo e, segundo, considerando um ângulo reto.

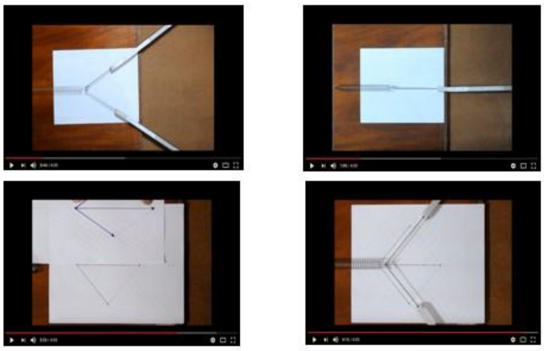


Figura 5: Cenas do vídeo sobre experimento com dinamômetros para determinação de força resultante. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Ut7kUpEhd4w> Acesso em: 29 dez. 2016.

A seguir, apresentamos a transcrição de uma parte do diálogo entre a professora e o estudante logo após assistirem ao vídeo:

Professora: *Você entendeu o que ele fez nas duas partes?*
Estudante: *Ele mudou só o ângulo.*

> **Professora**: *E quando mudou só o ângulo, mudou o que?*
> **Estudante**: *A reta, ... a resultante.*
> **Professora**: *Quando o ângulo é "mais fechado" a resultante é maior ou menor?*
> **Estudante**: *Maior.*

A partir do que foi assistido no vídeo foi possível o estudante modificar seu teorema-em-ação equivocado, sendo necessário, depois, apenas formalizar esse conhecimento a partir de explicações. Nesse momento, inferimos o teorema-em-ação: T4 - *"O módulo do vetor soma ($\vec{s}$) ou resultante ($\vec{R}$) é inversamente proporcional ao ângulo formado entre dois vetores"*.

Ao término da aula, o mesmo questionário do primeiro momento foi aplicado ao estudante, porém, dessa vez, com caráter avaliativo. A figura a seguir mostra a resolução apresentada pelo estudante para a questão 2C:

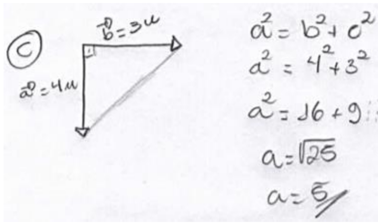


Figura 6: Resolução apresentada pelo estudante no terceiro momento da pesquisa, para a questão 2C

Diante da questão 3C, o estudante perguntou se poderia responder oralmente. Na sequência, apresentamos a resposta do estudante e o movimento gestual que realizou durante sua explicação:

> **Estudante**: *No sentido que o objeto vai ter uma força de 4N para baixo e outra força de 3N para o lado direito, o objeto vai descendo para baixo e para direita, para baixo e para direita, para baixo e para direita, ... mais para baixo que para a direita.*

Figura 7: Movimento gestual do estudante enquanto explicava a resolução da questão 3C.

Com a resolução apresentada na questão 2C, verificamos que o estudante utilizou o teorema-em-ação T2, correto para a situação proposta. Nessa resolução, verificamos, ainda, o envolvimento concomitante dos dois métodos estudados, do polígono e do paralelogramo. Isso porque o desenho do estudante mostra que ele utilizou o mesmo esquema proposto na questão para realizar a regra do polígono, quando para este método ele deveria ter unido a origem de $\vec{b}$ na extremidade de $\vec{a}$. Para aproveitar o esquema já fornecido na questão, o estudante deveria projetar $\vec{a}$ e $\vec{b}$, de forma a obter um paralelogramo, onde sua diagonal corresponderia à resultante da adição entre os dois vetores. Contudo, o que o estudante apresentou não está errado e consideramos que o mesmo possa ter relevado o fato de que ambos os métodos são equivalentes.

Diante da solução apresentada pelo estudante para a questão 3C, verificamos que ele não fez a associação com o que foi realizado na questão 2C. Contudo, seus gestos (ver figura 7) reforçam que houve mudança de teorema-em-ação, pois, enquanto no primeiro momento, para a mesma questão, o estudante respondeu que o movimento resultante seria para baixo, agora ele reconhece que "*ao traçar dois vetores com as origens coincidindo no mesmo ponto, o vetor soma* ($\vec{s}$) *ou resultante* ($\vec{R}$) *é determinado pelas extremidades dos vetores*", assim como em 2C.

Considerações finais

Partindo da ideia de que a identificação de teoremas-em-ação falsos é essencial para a reflexão e discussão sobre problemas de conceitualização no ensino de Matemática e de Física, bem como da ideia de que modos e formas representacionais são fundamentais tanto para que o estudante manifeste seus teoremas-em-ação quanto para que o professor possa auxiliar o estudante a descontruir teoremas-em-ação falsos e construir outros verdadeiros, com o presente estudo concluímos a potencialidade de inferir os teoremas-em-ação evocados pelo estudante nas resoluções de questões envolvendo adição vetorial que foram manifestadas por ele a partir de diversas representações: verbal oral, verbal escrita, pictórica e gestual. Além disso, foi a partir de diversas representações (verbal oral, verbal escrita, pictórica, gestual, animação *flash*, vídeo que mostra a manipulação de objetos físicos) que foi possível auxiliar o estudante a descontruir teoremas-em-ação falsos e construir outros verdadeiros, sem que, para isso, fosse necessário a direta explicação da professora, permitindo ao estudante construir seu próprio conhecimento.

Agradecimentos e apoios

Carlos Eduardo Laburú agradece apoio do CNPq.

Referências

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad.: Moretti, M. T. **Revemat**, v.7, n.2, p. 266-297, 2012.

GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A. Do saber fazer ao saber dizer: uma análise do papel da resolução de problemas na aprendizagem conceitual de Física. **Ensaio**, Belo Horizonte, v. 5, n. 1, p. 52-67, 2003.

LABURÚ, C. E.; SILVA, O. H. M. Multimodos e múltiplas representações: fundamentos e perspectivas semióticas para a aprendizagem de conceitos científicos. Investigações em Ensino de Ciências, v16(1), p.7-33. 2011b.

LABURÚ, C. E.; BARROS, M. A.; SILVA, O. H. M. Multimodos e múltiplas representações, aprendizagem significativa e subjetividade: três referenciais conciliáveis da educação científica. **Ciência & Educação**, V. 17, n.2, 2011, p. 469-487.

PIETROCOLA, M. A matemática como estruturante do conhecimento físico. **Cad. Cat. Ens. Fís**., V. 19, n.1, 2002, p. 89-109.

RADFORD, L.; EDWARDS, L.; ARZARELLO, F. Introduction: beyond words. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 70, n. 2, p. 91-95, 2009.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Trad.: Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.