UTILIZAÇÃO DE TEXTOS DE DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA SOBRE A TEORIA DO CAOS NA EDUCAÇÃO

USING SCIENCE COMMUNICATION TEXTS ABOUT CHAOS THEORY IN EDUCATION

Paulo Celso Ferrari [1,2,6,7]
José André Angotti [4,5,6,8]
Marcelo H. R. Tragtenberg [3,4,8]

[1] Instituto de Física da UFG
[2] Universidade Federal de Goiás
[3] Departamento de Física da UFSC
[4] Universidade Federal de Santa Catarina
[5] Departamento de Metodologia do Centro de Educação da USFC
[6] Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da UFSC
[7] Apoio CAPES [8] Apoio CNPQ

Resumo:

Defendemos a utilização de publicações destinadas à divulgação científica como material de apoio na compreensão de conceitos científicos contemporâneos na formação inicial ou continuada de professores. Ilustramos a validade desta proposta reunindo diversas citações onde os autores apresentam diferentes abordagens sobre um mesmo conceito. Pode-se observar que a contribuição dada por essas publicações ultrapassa a mera definição do conceito justamente por ser direcionada ao público leigo. Para este trabalho selecionamos três conceitos associados à Teoria do Caos: sensibilidade às condições iniciais, atratores estranhos e fractais. Trata-se de uma teoria inaugurada no início dos anos sessenta, mas que continua tendo aspectos controvertidos com margem a algumas confusões entre seus principais conceitos.

Palavras-chave: Divulgação Científica, Teoria do Caos, Ensino de Física.

Abstract:

We advocate using publications destined to science communication as support material to understand contemporary scientific concepts in professors' basic or continued formation. We illustrate this proposition validity collecting several citations where the authors present different approaches about the same concept. We can see that contribution given by these publications exceeds the mere definition of the concept exactly because it is addressed to the lay people. For this work, we selected three concepts related to Chaos Theory: sensibility to initial conditions, fractal and strange attractors. It is a theory inaugurated in the early 60's but it still has controversial aspects offering some confusion between its main concepts.

Keywords: Science Communication, Chaos Theory, Physics Teaching.

Introdução

As publicações de divulgação científica têm sido uma grande aliada na democratização da cultura científica. Seus autores são cientistas diretamente envolvidos na produção científica ou jornalistas especializados. Além do conteúdo específico de suas pesquisas, os cientistas comprometidos com a divulgação manifestam sua visão de ciência, que muitas vezes traduzem o pensamento filosófico de sua geração, seja consensual ou não. Alguns aproveitam também para relaxar o tom de autoridade escrevendo com uma certa ironia em relação à postura do cientista. Pode ser que o façam com a intenção deliberada de se aproximar, por identificação, do público leigo, mas indubitavelmente conseguem contribuir para desmistificar o ambiente da produção científica. A consciência de estarem se dirigindo a um público amplo dá aos autores da maioria dessas obras um tom intimista, com constantes evocações, em segunda pessoa, e informalidades.

Para serem compreendidas por um grande número de pessoas, essas publicações não podem introduzir formulações matemáticas avançadas. É regra editorial imposta para se garantir o sucesso de vendas, como reflexo em parte do preconceito em parte do fracasso da educação matemática das maiorias, mesmo escolarizadas. Geralmente limitam-se à matemática acessível ao nível médio de escolaridade, potencialmente, o público mais interessado em Ciência. Mesmo não podendo se aprofundar em conceitos matemáticos, podem ter diversas aplicações dentro da educação escolar, seja para despertar a curiosidade ou para ajudar a esclarecer um determinado conceito científico, respaldadas por critérios que precisam ser adquiridos ao longo da formação inicial e continuada.

Embora as indicações aos textos de divulgação possam ajudar a compreender os conceitos envolvidos, não raro são insuficientes para esclarecê-los de modo satisfatório. Os extratos que citaremos como exemplo obviamente não substituem a leitura integral do texto de onde foram extraídos. Apresentamos um conjunto de referências, sabidamente fragmentado, procurando semelhanças e diferenças no tratamento de um mesmo conceito entre vários autores, abrindo um leque de possibilidades, sem a intenção de esgotar a discussão. Na medida do possível procuramos descrever o contexto de onde foi extraída a citação.

Nossa proposta de utilização de publicações de divulgação científica como apoio à educação formal se pauta na identificação de diversos tratamentos dados pelos autores a conceitos fundamentais para a compreensão de um tema. O primeiro passo é, portanto, identificar os conceitos presentes nessas publicações. Para este nosso exemplo escolhemos três conceitos importantes para a Teoria do Caos (ou Caos Determinístico), indispensavelmente presentes em todas as publicações destinadas à divulgação desta teoria: sensibilidade às condições iniciais, atratores estranhos e fractais. O conceito de fractais aparece freqüentemente associado a este tema por estar estreitamente relacionado aos atratores estranhos.

A opção por essa teoria se justifica pela reduzida oferta de disciplinas sobre o tema nos cursos superiores (temos uma disciplina optativa no Curso de Física da UFSC) e pela inexistência de material didático para o Ensino Médio. Algumas iniciativas têm sido tomadas por grupos de pesquisadores da área, como dos professores Marcus A. M. de Aguiar e Maurício Urban Kleinke na VII Oficina de Física do Instituto de Física Gleb Wataghin, na Unicamp e mais recentemente o professor Reynaldo Daniel Pinto no projeto Física Para Todos da Estação Ciência. Pouquíssimas publicações nacionais da área de Ensino, a exemplo dos artigos de Ildeu de Castro Moreira na Revista Brasileira de Ensino de Física e Fernando Lang da Silveira no Caderno Catarinense de Ensino de Física (hoje Caderno Brasileiro de Ensino de Física). Caos foi tema de publicações em revistas de divulgação como Ciência Hoje e Super Interessante nas décadas de 80 e 90. Trata-se de uma teoria inaugurada no início dos anos sessenta mas que continua tendo aspectos controvertidos com margem a algumas confusões entre seus principais conceitos.

Sensibilidade às condições iniciais

O exemplo mais popular de sensibilidade às condições iniciais (SCI) é, certamente, o "efeito borboleta". Essa expressão foi criada pelo matemático, dedicado ao estudo da meteorologia, Edward Lorenz e ficou mundialmente conhecida após uma conferência intitulada *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?*, (Previsibilidade: A Batida das Asas de uma Borboleta no Brasil Provoca um Tornado no Texas?) apresentada na seção dedicada ao Global Atmospheric Research Program, na 139ª reunião anual da American Association for the Advancement of Science, em Washington, D.C, a 29 de dezembro de 1972. A expressão "efeito borboleta" se tornou praticamente um sinônimo de "sensibilidade às condições iniciais".

James Gleick, jornalista científico autor de diversos trabalhos de divulgação, aproveita a popularidade desta expressão e a importância deste comportamento para intitular o primeiro capítulo do seu livro "Caos, a criação de uma nova ciência". Gleick fornece uma descrição minuciosa do contexto vivido por Lorenz, em 1960, quando percebeu que o gráfico desenhado por seu computador, um Royal McBee LPG-300, após a retomada do processamento a partir de um resultado impresso anteriormente, não coincidia com o já obtido:

> *Seu primeiro pensamento foi que uma válvula eletrônica tivesse queimado.*
> *De repente, percebeu a verdade. Não havia enguiço. O problema estava nos números que tinha digitado. Na memória do computador, seis casas estavam armazenadas: 0,506127. Na impressão, para poupar espaço, apenas três apareciam: 0,506. Lorenz tinha colocado na máquina números mais curtos, arredondados, supondo que a diferença – um para mil – não tinha importância. (Gleick, 1987:14)*

Neste livro, provavelmente o primeiro a divulgar a Teoria do Caos, James Gleick aborda uma ampla variedade de conceitos a partir de narrativas baseadas em entrevistas com os próprios pesquisadores responsáveis pela criação da teoria, num período muito próximo do seu auge. Sua linguagem jornalística se torna bastante literária quando mescla os depoimentos com descrições da fisionomia e do ambiente de trabalho dos cientistas – tanto as reais percebidas no momento da entrevista quanto as tiradas de pura ficção ao retratar situações vivenciadas por eles. Gleick se apaixona pelo tema e se arrisca a tecer considerações filosóficas a respeito dos rumos que irá tomar a ciência a partir das inovações introduzidas pelo estudo dos sistemas dinâmicos não-lineares com a ajuda dos computadores. Em alguns temas o autor consegue explorar em profundidade os conceitos científicos envolvidos, muitas vezes reproduzindo as palavras dos próprios entrevistados. Por isso tornou-se uma referência para outros autores comprometidos com a divulgação científica e já foi citado até em produções científicas específicas de pesquisadores da área. Não só pelo pioneirismo, mas pela profundidade e extensão com que o tema é tratado, pode ser considerado um verdadeiro registro histórico.

Para nos auxiliar na compreensão da SCI, podemos recorrer também ao livro "Dos ritmos ao caos" de co-autoria de três pesquisadores franceses: Pierre Bergé, Yves Pomeau e Monique Dubois-Gance. Os autores fazem referência ao trabalho desenvolvido por Pierre-François Verhulst (1804-1848), relativo a sistemas dinâmicos não-lineares aplicados ao desenvolvimento de populações animais, muito anterior ao de Robert May, para contextualizar o aparecimento da equação que se tornaria o modelo matemático mais explorado pelos caologistas. Demonstram toda a dedução da equação que iria se consagrar o modelo mais surpreendente do comportamento dos sistemas não-lineares, batizado pelo próprio Verhulst como "função logística". Após transformar a equação diferencial de Verhulst na equação discreta hoje conhecida, introduzem dois números muito próximos nas condições iniciais demonstrando num gráfico a discrepância após algumas iterações e concluem:

> *Tocamos aí no coração do problema: a propriedade que certas funções não-lineares possuem de amplificar exponencialmente qualquer erro, por mínimo que seja,*

> *impede qualquer predição a longo prazo e acarreta um comportamento errático, que parece obedecer apenas às regras do acaso, apesar do determinismo estrito dessas funções. Esta propriedade de amplificação exponencial dos desvios, que reconcilia as noções de determinismo e de imprevisibilidade, é chamada de "sensibilidade às condições iniciais" ou SCI. Para bem identificar, do ponto de vista da semântica, esse comportamento errático ligado a um processo determinista entre outros comportamentos imprevisíveis, "aleatórios", ligados, pelo contrário, a processos muito mais complexos e não-deterministas, consagraram-lhe o adjetivo "caótico". (Bergé, 1994:74)*

Mais adiante os autores dão um outro exemplo numérico aproximado, analisando o resultado de sucessivas reflexões de um feixe luminoso estreito, levemente divergente, em espelhos cilíndricos. Demonstram que, em certas condições, após quatro reflexões a divergência do feixe se amplia tanto que “um igual domínio das condições de partida já não permite de forma alguma conhecer a condição de chegada” (Bergé, 1994:80).

Em “Dos ritmos ao caos” os autores tomam como eixo narrativo o tempo, cuja periodicidade se manifesta naturalmente nos movimentos celestes e é reproduzida artificialmente, segundo leis físicas, nos relógios e pêndulos. Fazem uma retomada histórica e até mitológica do papel do tempo na organização da cultura e contextualizam a luta humana em busca da previsibilidade. Ilustram como a abordagem matemática de certos fenômenos aparentemente periódicos revelou a possibilidade de variações tão abruptas quanto a inversão da polaridade magnética do planeta ou o movimento errático de um pêndulo. Os autores discutem a dinâmica de vários sistemas caóticos, principalmente do que é tema principal da pesquisa científica do grupo: a turbulência hidrodinâmica. Exploram o comportamento matemático de alguns modelos físicos para caracterizar o comportamento caótico, sempre resgatando o contexto histórico no qual foram percebidos. Resgatam a contribuição pouco reconhecida de T. Rikitake, que em 1958 propôs um modelo matemático para a inversão da polaridade magnética da Terra com características muito semelhantes às identificadas por Edward Lorenz em 1963. A percepção da SCI por Lorenz só é abordada no capítulo 9, dedicado especificamente ao desenvolvimento da meteorologia:

> *Desejoso de recomeçar com mais detalhes um cálculo particularmente longo, Lorenz o recomeçou, mas, para ganhar tempo, não desde o começo. Introduziu na máquina os valores das variáveis que havia obtido anteriormente (ele não tinha dificuldade para fazer isso, uma vez que os valores eram impressos à medida que eram obtidos). Foi ai que apareceu a desconcertante surpresa: ao cabo de pouco tempo, os valores encontrados não tinham mais nenhuma relação com os obtidos durante o cálculo precedente. E, no entanto, a máquina calculava corretamente e Lorenz não se enganara ao introduzir os valores indicados na impressora... Ao tentar compreender esse incompreensível resultado, ele percebeu que, se a impressora marcava os três primeiros algarismos dos resultados, a máquina, por seu lado, trabalhava com seis algarismos significativos. Lorenz compreendeu, então, que havia involuntariamente introduzido – em razão do erro arredondado – um minúsculo erro inicial ao refazer seu cálculo e, sobretudo, compreendeu que esse erro crescia exponencialmente à medida que o cálculo prosseguia, até chegar a um nível em que os resultados obtidos mudavam radicalmente. Lorenz acabava de descobrir o efeito considerável da sensibilidade às condições iniciais ou SCI. (Bergé, 1994:202)*

Ainda sobre a SCI, podemos encontrar em “Acaso e caos”, de David Ruelle destinado à divulgação científica, dois capítulos inteiros dedicados ao tema (capítulos 7 e 8). No capítulo 7, cujo título é “Dependência hipersensível das condições iniciais”, o autor introduz a operação de *crescimento exponencial* através da história do inventor do jogo de xadrez que pediu como recompensa ao Rei uma quantidade de arroz que, ao preencher o tabuleiro, dobrasse a cada casa, demonstrando que a quantidade final seria enorme. Sem se aprofundar na dedução matemática, toma como exemplo de hipersensibilidade às condições iniciais o movimento de queda de um lápis colocado verticalmente sobre sua ponta, que a um leve toque cai com um desvio que dobra a cada intervalo discreto de tempo. Conclui fazendo uma generalização, também não demonstrada, que instiga a intuição do leitor:

> *Portanto, uma pequena causa (empurrar ligeiramente o lápis para a direita ou para a esquerda) tem um grande efeito. Somos tentados a pensar que, para que tal coisa ocorra (que uma pequena causa tenha um grande efeito), é preciso um estado excepcional no tempo zero, como o equilíbrio instável de um lápis sobre a sua ponta. A verdade é o contrário: muitos sistemas físicos dependem de maneira hipersensível das condições iniciais, quaisquer que sejam essas condições iniciais. Em outras palavras, qualquer que seja o estado do sistema no tempo zero, se o "empurrarmos" um pouco para a direita ou um pouco para a esquerda, resultarão disso importantes efeitos a longo prazo. Isto é um tanto contrário à intuição, e foi preciso certo tempo para os matemáticos e os físicos compreenderem bem como as coisas se passam. (Ruelle, 1991:58)*

Segue o capítulo discutindo o exemplo da mesa de bilhar com obstáculos redondos, fazendo analogia com a reflexão em espelhos cilíndricos. No final explica que uma demonstração matemática rigorosa para este exemplo é difícil e só foi obtida em 1970 pelo matemático russo Yakov G. Sinai.

No capítulo 8 resgata as contribuições de Jacques Hadamard, Pierre Duhem e Henri Poincaré para o problema da SCI citando os exemplares que os levaram a observar o efeito, argumentando que, apesar de terem anunciado a SCI, "o estudo recente do que agora chamamos o *caos* não se beneficiou da compreensão física penetrante adquirida" por esses pesquisadores. Para efeito da compreensão do conceito de SCI cabe citar ainda um parágrafo deste capítulo onde Ruelle coloca muito bem a incidência da SCI nos sistemas dinâmicos:

> *Porém, voltemos à nossa pergunta: a dependência hipersensível das condições iniciais é exceção ou regra para os sistemas dinâmicos? A evolução temporal é ou não preditível a longo prazo, em geral? De fato, há diversas possibilidades. Em certos casos (por exemplo, o de um pêndulo com atrito), não há dependência hipersensível das condições iniciais (podemos predizer com precisão como o pêndulo será freado e evoluirá para um estado de repouso).*
>
> *Em outros casos, temos dependência hipersensível das condições iniciais (é o caso, entre outros, do bilhar com obstáculos convexos). Finalmente, muitos sistemas dinâmicos têm um comportamento misto, em que a predição a longo prazo é possível para certas condições iniciais, mas não para outras. (Ruelle, 1991:65)*

O eixo central de "Acaso e caos" é o tratamento que a ciência vem dando ao problema do determinismo e do acaso. David Ruelle discute as soluções encontradas pela teoria das probabilidades, pela física estatística e pela mecânica quântica, para tratar de sistemas onde existe o acaso. Enfoca os sistemas caóticos como uma falsa ilusão de previsibilidade, pois, apesar de determinísticos, manifestam uma grande sensibilidade às condições iniciais. Aproveita para esclarecer algumas controvérsias na sua área de pesquisa: a turbulência. Ruelle, tanto quanto Bergé *et al.*, descreve a história sincrônica dos acontecimentos científicos, revelando o ponto de vista do cientista diretamente comprometido com as descobertas recentes e ainda envolto nas dúvidas que mobilizam as pesquisas de ponta. Compõe o grupo de pesquisadores conscientemente comprometidos com a divulgação científica e expressa essa preocupação no Prefácio do livro, fazendo a seguinte declaração:

> *O estilo adotado neste livro não é técnico, e as poucas equações que nele se encontram podem ser desprezadas sem maiores comprometimentos. A física e as*

> *matemáticas ensinadas no 2º grau são, em princípio, tudo que se precisa conhecer para ler os capítulos que se seguem. (Ruelle, 1991:7)*

Mas é Ian Stewart quem, a meu ver, melhor elucida o efeito borboleta, porque descreve de forma bem simples a razão do surgimento da sensibilidade: o mecanismo topológico do estique-e-dobre, sobre o qual voltaremos a discutir neste trabalho. No capítulo 7, intitulado "A Fábrica Meteorológica", discute as descobertas de Lorenz escrevendo, inclusive, as suas clássicas equações, mas prefere um exemplo de dinâmica discreta para caracterizar a SCI. Toma como exemplo numérico uma iteração bem simples que consiste em "enrolar" a função $x = 10x$ no perímetro de uma circunferência e mostra numericamente a distância entre valores, inicialmente próximos, após algumas iterações, provando a sensibilidade.

> *Qual a origem dessa sensibilidade?*
>
> *É uma mistura de duas tendências conflitantes na dinâmica.*
>
> *A primeira é esticar. O mapeamento $x \rightarrow 10x$ expande as distâncias localmente por um fator dez. Pontos próximos são afastados.*
>
> *A segunda é dobrar. O círculo é um espaço limitado, não há lugar para esticar tudo. Ele se dobra sobre si mesmo muitas vezes – é a única maneira de caber em si mesmo depois que você expandiu as distâncias por dez vezes. Assim, embora pontos muito próximos se afastem, alguns pontos muito distantes entre si se movem de maneira muito próxima.*
>
> *Por força da expansão, pontos que começam muito próximos evoluem diferentemente. De início, a diferença cresce de modo regular. Mas, uma vez que se afastaram o suficiente, os dois pontos "se perdem de vista". Um já não precisa mais imitar o comportamento do outro.(Stewart, 1989:157)*

Stewart revela neste mecanismo uma fonte de imprevisibilidades. Em seu livro Será que Deus Joga Dados? apropria-se da célebre interrogação de Einstein relativa ao princípio da incerteza na mecânica quântica para questionar a previsibilidade na física clássica. Num tom muitas vezes irônico revela que a pesquisa científica procurou evitar por séculos a abordagem dos sistemas dinâmicos não-lineares realizando aproximações que permitiram obter solução analítica para a descrição matemática de muitos problemas, contribuindo para convencer a sociedade de que a ciência é eficiente na previsão dos fenômenos. O autor não menospreza o avanço tecnológico possibilitado pela ciência que recorre à aproximação linear mas anuncia o surgimento de uma nova matemática a partir do estudo aprofundado dos sistemas não-lineares. Retoma, no último capítulo, o problema quântico levantado por Einstein e compara a imprevisibilidade quântica com a imprevisibilidade clássica inerente à dificuldade de se conhecer as condições iniciais com precisão mesmo em sistemas que não exibem comportamento caótico, como um simples jogo de dados.

> *Em outras palavras, a fonte da aleatoriedade reside na escolha das condições iniciais. A menos que eu possa controlá-las exatamente, não posso fazer uma previsão precisa.*
>
> *Aqui o determinismo laplaciano soçobra de novo – mas de maneira sutilmente diferente. A moeda modelo não é um sistema caótico. É um sistema perfeitamente regular. (Stewart, 1989:317)*

Complementando as contribuições que podem ser extraídas de livros de divulgação científica, vale citar que a preocupação de Ruelle para com o acaso o leva a dedicar boa parte do "Acaso e Caos" à discussão da Mecânica Estatística como uma solução encontrada pelos físicos para lidar com a imprevisibilidade dos sistemas de muitas partículas. No capítulo intitulado "Entropia" começa a discutir o conceito de *irreversibilidade* questionando a possibilidade de serem invertidas as velocidades de todas as partículas de um sistema para fazê-lo retornar a um estado anterior. Deste questionamento surge uma importante relação entre a Mecânica Estatística e o Caos, relacionada à sensibilidade às condições iniciais:

> *Há, no entanto, uma impossibilidade mais sutil na experiência de reversão das velocidades que acabamos de descrever, e esta impossibilidade provém da dependência hipersensível das condições iniciais. Quando aplicamos as leis da mecânica clássica ao estudo dos movimentos e colisões de um sistema de átomos e de moléculas, imaginamos que esse sistema não interage com o resto do Universo. Mas isso é totalmente irrealista. Mesmo o efeito gravitacional de um elétron nas fronteiras do Universo conhecido é importante, e não pode ser desprezado. Se, portanto, revertemos as velocidades das partículas depois de um segundo de observação do sistema, não vemos o tempo voltar atrás. Depois de um tempo muito curto, o elétron nos confins do Universo terá mudado o curso dos acontecimentos e já não temos nenhuma razão para pensar que a entropia vai diminuir. (De fato, ela continuará a crescer, mas resta-nos entender a razão desse crescimento geral da entropia.) (Ruelle, 1991:150)*

Essa informação pode contribuir para ampliar a compreensão da própria irreversibilidade. Como o próprio autor comenta em seguida, na época em que Boltzman tentava convencer a comunidade científica da validade de suas conclusões não foi imediatamente compreendido, provavelmente porque os próprios cientistas só conseguiam pensar nas leis reversíveis da mecânica clássica de Newton.

Atratores estranhos

No estudo dos sistemas dinâmicos nem sempre é possível prever o estado do sistema a cada instante. Por isso, uma informação que passa a ter grande importância é o estado para o qual o sistema tende após um intervalo muito grande de tempo. O estado para o qual o sistema tende é chamado de “atrator”. Stewart, em sua forma descontraída de escrever, falando sobre um sistema dinâmico, define o atrator simplesmente assim:

> *Um atrator é definido como... qualquer coisa em que ele se estabiliza! Nessa altura, não tendo demonstrado nenhum teorema geral como Poincaré-Bendixson, não era possível fornecer uma definição mais minuciosa. Analisando a idéia, porém, descobrimos um modo de explicitar melhor o conceito. A essência de um atrator é ser uma porção do espaço de fase tal que qualquer ponto que se ponha em movimento nas suas proximidades se aproxima cada vez mais dele (Stewart, 1989:121)*

Anteriormente, porém, discute a representação gráfica das várias possibilidades de evolução do pêndulo amortecido forçado no espaço de fases e situa na figura as quatro situações possíveis de desenvolvimento futuro do sistema (atratores), que dependem dos parâmetros fixados a cada simulação da evolução do sistema por um intervalo de tempo muito longo. A partir da figura abaixo (de número 36 no livro), o “retrato de fase”, o autor discute as quatro possibilidades a seguir:

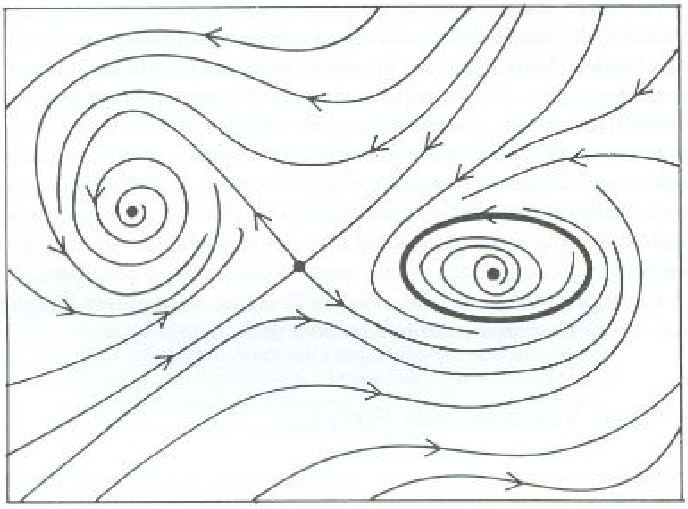


Fig. 1. Retrato de fase de um fluxo no plano, mostrando (da esquerda para a direita) um sumidouro, uma sela, um ciclo-limite e uma fonte.

Há quatro características desse fluxo específico para as quais gostaria de chamar a sua atenção.

Primeiro, no lado esquerdo há um ponto para o qual todas as linhas de fluxo próximas se orientam, em espirais que se estreitam. Isto é chamado de sumidouro. Lembra muito um escoadouro, pelo qual o fluido escoa, e talvez o nome venha daí.

No lado direito, há um escoadouro ao inverso: um ponto a partir do qual o fluido se espraia em espirais. A isto se chama de fonte. Pense num fluido brotando de uma nascente.

Entre uma coisa e a outra, há um lugar onde as linhas de fluxo parecem se cruzar. A isto se dá o nome de sela. Na realidade, as linhas não se cruzam; acontece algo de mais interessante, que descreverei adiante. Quando dois jatos de um fluido real se dirigem um em direção ao outro, o que você vê são selas.

Finalmente, em torno da fonte, à direita, há uma volta fechada, única. É um ciclo-limite. Assemelha-se a um redemoinho, em que o fluido gira incessantemente. Um turbilhão. (Stewart, 1989:109)

No mesmo capítulo, intitulado "Atratores Estranhos" o autor retoma cada uma dessas possibilidades e as discute em sub-itens específicos, acrescentando detalhes e discutindo as condições impostas ao sistema para que ele caminhe na direção de um ou outro atrator. Stewart reduz esses quatro comportamentos em duas situações "típicas" e as traduz numa linguagem muito direta e novamente extrovertida:

Se você quiser, os únicos movimentos de longa duração são
. permanecer em repouso num estado estacionário
. repetir alguma série de movimentos periodicamente.
Ou, mais simplesmente,
. ficar quieto
. girar indefinidamente (Stewart, 1989:122)

Partindo dessa caracterização consegue levar o leitor pelos caminhos tortuosos da pesquisa científica com clareza e leveza. Mencionando a contribuição de Smale na identificação do mecanismo topológico conhecido como "estica-e-dobra" e a introdução de outras dimensões ao espaço de fases chega a descrever as características que levaram Ruelle e Takens a cunhar o nome de "estranho" ao tipo de atrator encontrado em certos sistemas dinâmicos não-lineares, que apresenta a forma de um solenóide:

Por fim, o solenóide não é um ponto único, e tampouco é um círculo. Não pode, portanto, ser um dos atratores típicos tradicionais. Dois matemáticos, Floris Takens

> *e David Ruelle, cunharam um nome para esse novo tipo de atrator. Um atrator estruturalmente estável que não seja de um dos tipos clássicos, ponto ou círculo, é chamado de atrator estranho. O nome é uma declaração de ignorância: sempre que os matemáticos chamam algo de "patológico", "anormal", "estranho", ou coisa parecida, o que isto significa é: "Não entendo que diabo é isto." Mas é também uma bandeira, que transmite uma mensagem: Posso não entendê-la, mas ela certamente me parece importante. (Stewart, 1989:134)*

Numa linha de raciocínio muito semelhante à de Stewart, Bergé *et al.* discute os diversos comportamentos do pêndulo, tomando como ilustração o "botafumeiro" de Compostela, um grande incensório que é acionado por uma corda puxada pelos fiéis, a cada puxão fazendo variar o comprimento da corda. Mas duas passagens do livro, em particular, no capítulo 7, intitulado "Caos e atratores estranhos", nos fornecem informações importantes sobre os atratores estranhos. A primeira refere-se à origem matemática do conceito:

> *Para além de suas formas, de suas topologias, sempre notáveis, não raro magníficas, um tanto semelhantes às das soberbas e delicadas inflorescências da geada no campo invernal, esses objetos "estranhos" fascinaram os pesquisadores que se lançaram à sua descoberta. Embora ela tenha inicialmente sido numérica – ou seja, elaborada no âmbito de modelos matemáticos e com o auxílio de cálculos em computadores –, sua evidenciação a partir de situações físicas reais não foi simples, mas, com isso, os resultados positivos provocaram um entusiasmo ainda maior. (Bergé, 1991:133)*

As situações físicas às quais o autor se refere, que possibilitaram afirmar pela primeira vez que os atratores existem realmente, estão no âmbito da turbulência, tema de pesquisa do grupo responsável pela publicação do livro. O "entusiasmo ainda maior", portanto, foi sentido na pele!

Justamente sobre a questão da existência de atratores reais destaco a seguinte passagem:

> *Até agora, mostramos o princípio de formação de um atrator estranho mais ou menos como um jogo de construção. Porém, encontramo-los naturalmente no mundo físico experimental? É claro que os atratores estranhos não aparecem espontaneamente durante as observações, mas o pesquisador deverá cingi-los em seu domínio reservado, o espaço das fases. (Bergé, 1994:156)*

Considero de fundamental importância a conexão entre as duas citações acima. Juntas esclarecem que o atrator é a representação geométrica da evolução de um sistema dinâmico, somente perceptível quando utilizamos um determinado modo de descrição: o espaço de fases.

Neste mesmo capítulo os autores descrevem como é possível reconstruir um atrator, que demonstra melhor suas propriedades quando representado num espaço de fases de, no mínimo, três dimensões, a partir de dados experimentais de uma única variável. Salientam também a importância de se obter a dimensão fractal do atrator reconstruído para a caracterização do comportamento do sistema. Discutem essas questões na primeira pessoa do plural, pois foram, com Grassberger e Procaccia, entre outros, idealizadores dessas técnicas!

Uma discussão mais detalhada sobre a descoberta do atrator estranho fica por conta de um protagonista dessa descoberta, David Ruelle. Ruelle dedica todo o capítulo 9, intitulado "Turbulência: Modos", do seu livro "Acaso e Caos" para descrever o que ele mesmo denomina como o "combate científico travado para compreender a turbulência". Para tanto, discute as interpretações antecedentes de Couette, Taylor, Landau e Hopf, que utilizam o conceito de "modos" para descrever a turbulência, atribuindo a esta interpretação o status de "paradigma", no sentido utilizado por Thomas Kuhn. Mas é no capítulo seguinte, intitulado "Turbulência: Atratores Estranhos", que retoma o trabalho de Edward Lorenz como exemplo do comportamento caótico e formula uma definição primorosa de um atrator.

> *...o que é um atrator? É o conjunto sobre o qual se move o ponto P que representa o estado de um sistema dinâmico determinista quando aguardamos bastante tempo (o atrator descreve a situação de regime, depois do desaparecimento dos fenômenos transitórios). Para que esta definição tenha um sentido, é importante que as forças exteriores que ajam sobre o sistema sejam independentes do tempo (senão se poderia fazer o ponto P mover-se de maneira completamente arbitrária). É importante também que nos interessemos por sistemas físicos dissipativos (ou seja, sistemas que dissipam a energia em calor: os fluidos viscosos, por exemplo, dissipam a energia mecânica por atrito interno). A dissipação é o que faz desaparecer os fenômenos transitórios. É por causa da dissipação que, no espaço de dimensão infinita que representa um sistema, há apenas um pequeno conjunto (o atrator) realmente interessante. (Ruelle, 1991:87)*

Em seguida, ao expor o argumento principal em favor da caracterização de uma atrator “estranho” no fenômeno da turbulência, questionando o paradigma dos modos, Ruelle nos apresenta as principais características de um atrator estranho revelando, entre outras coisas, sua ligação com os fractais e a sensibilidade às condições iniciais.

> *Em primeiro lugar, os atratores estranhos têm um ar estranho: não são curvas ou superfícies lisas, mas objetos de dimensão não inteira ou, como diz Benoit Mandelbrot, fractais. Em segundo lugar, e isto é mais importante, o movimento sobre um atrator estranho apresenta o fenômeno de dependência hipersensível das condições iniciais. Finalmente, embora os atratores estranhos sejam de dimensão finita, a análise em termos de freqüências temporais revela um contínuo de freqüências.(Ruelle, 1991:88)*

Gleick também dedica um capítulo exclusivo ao tema, intitulado “Atratores Estranhos”. Assim como Ruelle, resgata a trajetória histórica dos atratores estranhos no estudo da turbulência. Discute as principais contribuições teóricas de Landau e Hopf, as experimentais de Couette e Taylor, numa seqüência não muito linear, até chegar na interpretação matemática de Ruelle e Takens e finalmente nas experiências de Swinney e Gollub. Para efeito de contribuição à compreensão do conceito, Gleick, mesmo não recorrendo a definições dos termos específicos que utiliza, também contribui para caracterizar a natureza matemática do atrator estranho e revelar a existência de outros tipos de atratores:

> *O atrator estranho vive no espaço de fase, uma das invenções mais poderosas da ciência moderna. O espaço de fase proporciona uma maneira de transformar números em imagens, extraindo todas as informações essenciais de um sistema de partes móveis, mecânicas ou fluidas, e traçando um flexível mapa rodoviário de todas as suas possibilidades. Os físicos já trabalhavam com dois tipos de "atratores" mais simples: pontos fixos e ciclos limites, representando o comportamento que chegava a um regime estacionário ou se repetia continuamente. (Gleick, 1987:135)*

Outra contribuição importante do texto de James Gleick é fazer a devida ligação entre atratores estranhos e fractais. Ao tentar descrever o problema ao qual tinham se dedicado Ruelle e Takens, o autor apresenta as principais características dos atratores estranhos e a conseqüente relação com os fractais:

> *Ruelle e Takens indagaram se algum outro tipo de atrator podia ter o conjunto adequado de propriedade. Estável – representando o estado final de um sistema dinâmico num mundo cheio de ruídos. De baixa dimensão – uma órbita num espaço de fase que podia ser um retângulo ou uma caixa, com apenas alguns graus de liberdade. Não-periódico – que nunca se repetisse, e nunca caísse num ritmo estável do relógio de pêndulo. Geometricamente, a questão era um enigma: que tipo de órbita podia ser traçada num espaço limitado, de modo a não repetir-se nunca e nunca cruzar-se porque quando um sistema retoma a um estado pelo qual já passou,*

deve seguir o mesmo caminho, a partir dali. Para produzir todos os ritmos, a órbita teria de ser uma linha infinitamente longa numa área finita. Em outras palavras – mas a palavra não tinha sido criada –, teria de ser fractal. (Gleick, 1987:140)

No entanto Gleick não se aprofunda nessa relação, uma vez que apresenta o conceito de Fractais num capítulo anterior, contando uma história que, apesar de estar imersa no universo das equações discretas e não-lineares, se desenvolveu independentemente da história do Caos.

Fractais

É raro encontrar alguma publicação de divulgação científica sobre Caos que não mencione a descoberta dos Fractais. Apesar de terem se desenvolvido enquanto duas frentes de pesquisa totalmente independentes dentro da pesquisa em matemática, ambas tiveram seu desenvolvimento intimamente relacionado ao uso dos computadores, mesmo tendo sido percebidas por matemáticos de épocas anteriores ao avanço tecnológico do último século. Tanto a formação de figuras a partir de um grande número de iterações de uma função quanto o comportamento de sistemas dinâmicos a longo prazo (os atratores) revelaram a existência de objetos com uma geometria onde não existem apenas dimensões inteiras: a geometria fracionária, ou fractal. Justamente porque os Fractais tiveram seu desenvolvimento tão próximo ao do Caos e estão associados à representação geométrica dos atratores estranhos, torna-se grande o risco de aparecerem confusões entre essas duas frentes de pesquisa.

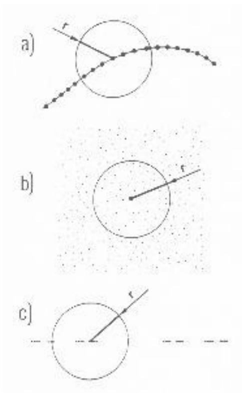
No sentido de contribuir para desfazer essa confusão entre Fractais e Caos, além das citações já elencadas anteriormente, podemos encontrar uma excelente contribuição de Bergé *et al.* numa passagem do capítulo 7 ("Caos e atratores estranhos") de Dos Ritmos ao Caos. Depois de descrever dois dos fractais mais antigos, a *poeira de Cantor* e o *floco de neve*, os autores associam essa geometria à dos atratores estranhos e em seguida fazem uma advertência explícita à tendência de se confundir a geometria fractal com o comportamento caótico.

O momento é propício para advertir contra um amalgama corrente e, no entanto, impróprio entre "fractal" e "caos". Em primeiro lugar, os fractais são figuras geométricas, portanto estruturas espaciais (freqüentemente muito ordenadas), enquanto o caos designa um tipo de comportamento temporal (os pontos que representam a evolução caótica no espaço das fases é que se colocam num fractal). Por outro lado, e apesar de sua complexidade, os fractais gerados por processos iterativos regulares como os que acabamos de descrever nada têm de impredizível e não podem, portanto, ser considerados como curvas caóticas. (Bergé, 1994:152)

Ian Stewart também ressalta semelhanças e diferenças entre essas duas frentes de pesquisa.

Em ambos, a imaginação geométrica é senhora. Mas, enquanto no caos a geometria presta vassalagem à dinâmica, nos fractais ela reina absoluta. Os fractais oferecem uma nova linguagem para descrever a forma do caos. (Stewart, 1989:233)

No mesmo capítulo 7, num sub-item anterior, intitulado "Um pouco de geometria...esquisita" os autores de Dos Ritmos ao Caos apresentam as principais características dos fractais, como a invariância de escala e a dimensão fracionária, numa linguagem simples e concisa "sem matemáticas complicadas", fazendo uso de exemplos numéricos e sugerindo a existência de objetos naturais que obedecem a essa geometria. Com o exemplo da poeira de Cantor, demonstram a invariância de escala e introduzem um questionamento sobre a geometria euclidiana que desencadeará na definição de dimensão fracionária. A questão da dimensão fractal ocupa duas páginas inteiras do livro, com "cálculos" da dimensão da poeira de Cantor e da curva de Koch (floco de neve) como exemplos numéricos. Aspas na palavra cálculo são devidas ao fato de que, apesar de apresentar, com exemplos bem geométricos, auxiliados por uma figura, o método desenvolvido por P. Grassberger e I. Procaccia para determinação da dimensão, os autores não expressam a equação em termos de logaritmo, mas apresentam-na apenas em sua forma exponencial. No trecho abaixo praticamente ensinam como medir a dimensão.



Poderíamos ser mais exigentes e ir além dessas definições muito qualitativas. Poderíamos imaginar, por exemplo, que cada objeto cuja dimensão euclidiana gostaríamos de caracterizar seja formado de um número muito grande de pontos discretos eqüidistantes entre os vizinhos mais próximos (ou distribuídos uniformemente; vide a Figura). A dimensão do objeto (dimensão sempre tomada no sentido topológico) pode, então, ser determinada de maneira objetiva. O procedimento consiste em contar o número dos pontos do objeto contidos no interior de uma esfera "de contagem" centrada sobre um desses pontos e em ver como esse número varia com o raio r da esfera (limitar-nos-emos a fazer essa contagem para esferas de raio muito inferior ao tamanho do objeto a estudar, mas muito superior à distância entre pontos). Comecemos pelo caso mais simples: o da linha, que suporemos reta, para simplificar – mas nada muda se ela for curva, levando em conta a restrição acima. A esfera de contagem tem como centro um ponto dessa linha. O comprimento da linha inclusa na esfera e, portanto, o número de pontos contados são evidentemente proporcionais ao seu raio. Se refizermos esse mesmo tipo de cálculo para uma superfície, a área compreendida na esfera de contagem – portanto, o número de pontos – será, desta vez, proporcional ao quadrado do raio. No caso de um volume, é ao cubo do raio que esse número será proporcional. Tudo isso se resume numa fórmula única:

$N(r) = N^*. (r)^D$

O expoente D mede a dimensão; ele vale 1 para uma linha, 2 para uma superfície, 3 para um volume (N é a densidade dos pontos sobre o objeto). Note-se que, no caso do ponto único, o número contado será independente do raio da esfera (e igual a 1). Para traduzir esse fato, é preciso fazer D = 0 na fórmula acima, o que mostra de maneira objetiva que a dimensão do ponto é zero. (Bergé, 1994:148)*

Para chegar aos valores D = 0,63... e D = 1,2618..., as dimensões respectivamente da poeira de cantor e da curva de Koch, os autores sugerem que pode haver “buracos” no objeto e limitam-se a dizer que “aplicando-se o método acima” obtém-se esses valores.

Já Ian Stewart faz o contrário. Apresenta o cálculo da dimensão em termos de logaritmos mas omite qualquer tentativa de dedução. Apela apenas para a intuição do leitor discutindo a figura gerada pelo floco de neve de Koch.

À primeira vista, a idéia parece esquisita. Que sentido pode ter a afirmação de que uma coisa tem uma dimensão e um quarto? Mas o floco de neve é obviamente mais ondulado – preenchendo mais espaço – do que uma curva regular, unidimensional. Ao mesmo tempo, preenche menos espaço do que uma superfície bidimensional. Uma dimensão situada em algum ponto entre 1 e 2 parece algo bastante razoável. A dimensão de Hausdorff-Besicovitch é definida para captar essa idéia, harmonizando-se ao mesmo tempo com a dimensão usual de espaços usuais. Sua formulação precisa é complicada, e não seria muito reveladora, mas a idéia básica é definir o "volume d-dimensional" de uma figura para d arbitrário (não-inteiro). Assim, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch da figura é o valor de d para o qual o volume d-dimensional muda de infinito a zero.

Cada figura tem um valor específico de d no qual o volume d-dimensional faz tal desvio. Para o conjunto de Cantor, por exemplo, pode-se demonstrar que d é log

> *2/log 3, que é aproximadamente 0,6309; para o floco de neve é log 4/log 3 = 1,2619. (Stewart, 1991:237)*

A diferença básica entre os enfoques dados por Bergé *et al*. e Stewart para apresentar o conceito de dimensão fractal é que de fato existem definições diferentes de dimensão. O método desenvolvido por Grassberger e Procaccia é utilizado para se determinar a *dimensão de correlação,* enquanto o proposto por Felix Hausdorff e A. S. Besicovitch determina a *dimensão de capacidade*.

É bom lembrar que Bergé e os demais autores de "Dos ritmos ao caos" são pesquisadores alinhados ao problema da turbulência, portanto, muito envolvidos com os problemas experimentais. Mesmo assim, não se arriscam a incluir a turbulência entre os exemplos da existência de objetos naturais com estrutura geométrica fractal. Como exemplos desses objetos citam o recorte do litoral da Bretanha, os flocos de neve, a estrutura dos pulmões e as árvores.

Sobre a irregularidade dos litorais, James Gleick expõe detalhadamente o problema levantado por Benoit Mandelbrot sobre a medida de um litoral, que o fez suscitar a necessidade de definir um outro tipo de geometria, não-euclidiana. Quanto menor a unidade padrão de medida adotado mais detalhes serão considerados e maior se tornará a medida da extensão do litoral. Mandelbrot, no entanto, levou este raciocínio ao extremo, questionando as dimensões euclidianas.

Num capítulo de 42 páginas do seu livro "Caos, a criação de uma nova ciência", intitulado "Uma Geometria da Natureza", James Gleick descreve a evolução do conceito de Fractais contando da trajetória do matemático Benoit Mandelbrot. Atribui a esse matemático a responsabilidade por resgatar o conceito de dimensão fractal desenvolvido por Hausdorff e Besicovitch e de revelar a propriedade de auto-similaridade a partir de simulações em computador. Não dá muita ênfase à relação direta entre os fractais e os atratores estranhos, limita-se a mencioná-la quando narra todo o alvoroço que as idéias de Mandelbrot provocaram no meio científico na década de 70:

> *Os padrões que pessoas como Robert May e James Yorke descobriram em princípios da década de 70, com seus complexos limites entre o comportamento ordenado e o caótico, tinham regularidades insuspeitadas que só podiam ser descritas em termos da relação entre as escalas grandes e pequenas. As estruturas que proporcionavam a chave da dinâmica não-linear eram fractais. E no nível prático mais imediato, a geometria fractal também proporcionava uma série de ferramentas que foram utilizadas por físicos, químicos, semiólogos, metalurgistas, teóricos das probabilidades e fisiologistas. Esses pesquisadores estavam convencidos, e tentavam convencer outros, de que a nova geometria de Mandelbrot era a da própria natureza. (Gleick, 1987:108)*

As estruturas às quais Gleick se refere são os atratores estranhos. Esta citação revela que os fractais e a teoria do caos tiveram uma história intimamente correlacionada, porém, é importante ressaltar que a propriedade essencial dos sistemas com comportamento caótico é a sensibilidade às condições iniciais.

Considerações finais

Mesmo acreditando que a maior contribuição dos textos de divulgação científica seja no ensino de temas ainda ausentes do programa oficial, reconhecemos a importância de sua utilização mesmo em temas já consagrados da física clássica, moderna ou contemporânea. Como pudemos observar em várias citações acima, uma publicação destinada intencionalmente à divulgação científica geralmente é expressa numa linguagem intermediária entre a linguagem científica e a do público leigo, o que a torna muito especial. Quando é produzida pelo próprio cientista, como nos casos de Ruelle, Stewart e Bergé, as tentativas de aproximação com o leitor revelam até mesmo concepções implícitas sobre os modos de produção científica, isto é, vão muito além da mera discussão do conceito específico.

A idéia de trabalhar textos de divulgação científica como material de apoio no ensino formal, sobretudo quando o assunto é ainda pouco explorado no Ensino Médio e mesmo na graduação, é sugerida por vários pesquisadores. É o caso de Alvetti, 1999, que se baseou em artigos da revista Ciência Hoje sobre tópicos de Física Moderna e Contemporânea. Preparamos um mini-curso sobre a Teoria do Caos a ser ministrado na disciplina Metodologia e Prática de Ensino de Física do curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal de Santa Catarina baseado tanto nos livros didáticos tradicionais quanto nos livros de divulgação. Sua efetivação deverá ocorrer até o final deste semestre e os resultados posteriormente divulgados. O que quisemos demonstrar neste artigo foi a riqueza de contribuição que as publicações de divulgação possuem no intuito de incentivar que os professores recorram a essas publicações enquanto material complementar de ensino.

Referências Bibliográficas

ALVETTI, Marco Antonio Simas – Ensino de física moderna e contemporânea e a revista Ciência Hoje – Dissertação (Mestrado) – Orientador: Demetrio Delizoicov – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências da Educação. Florianópolis, 1999.

BERGÉ, Pierre; POMEAU, Yves; DUBOIS-GANCE, Monique – Dos ritmos ao caos – São Paulo: Editora da UNESP, 1996.

GLEICK, James – Caos: a criação de uma nova ciência – Rio de Janeiro: Campus, 1989.

MOREIRA, Ildeu de Castro – Sistemas Caóticos em Física – Uma Introdução – Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 15 nºs 1 a 4 – São Paulo: USP, 1993.

RUELLE, David – Acaso e Caos – São Paulo: Editora da UNESP, 1993.

SILVEIRA, Fernando Lang da – Determinismo, previsibilidade e Caos – Caderno Catarinense de Ensino de Física – vol. 10, nº 2 – Florianópolis: UFSC, 1993.

STEWART, Ian – Será que Deus Joga Dados? – Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora, 1989.