VISUALIZAÇÃO DE FUNÇÕES COMPLEXAS COMO PAPEL FUNDAMENTAL EM INTERPRETAÇÕES E CONSTRUÇÕES CONCEITUAIS: EXPERIÊNCIAS EM SALAS DE AULA*

COMPLEX FUNCTIONS VISUALIZATION AS A BASIC ROLE IN INTERPRETATIONS AND CONCEPTUAL BUILDING: EXPERIENCES IN CLASSROOMS

Edvaldo Lima da Silva[1]
Aguinaldo Robinson de Souza[2]

[1]UNESP/FC/PG, edvaldo@fc.unesp.br
[2]UNESP/FC/DQ, arobinso@fc.unesp.br

Resumo

Este trabalho pretende apresentar uma experiência com interpretações visuais de funções complexas a partir do desenvolvimento do software F(C). Detalhamos a utilização do software através da elaboração de atividades e experiências em salas de aula de estudantes de Matemática. A utilização do Domínio de Cores para representação de entes que se comportam com 4 variáveis reais é usada para esse tipo de representação visual. Iniciamos as atividades com geração e leituras de gráficos. Explorações e gerações de animações para estudos de famílias de funções se mostrou uma característica intrínsica ao uso da ferramenta, a qual possibilita generalizações fundamentais acerca das características de cada tipo de função. Interpretações de raízes para soluções de problemas e estudo de transformações lineares também são partes das atividades utilizadas no projeto. Finalmente, tentamos lançar mão do papel da visualização como instrumento fundamental no processo de aprendizagem na Matemática, bem como o uso desse tipo de argumento para justificar o uso de demonstrações não formais no Ensino de Matemática.

Palavras-chave: Software Educativo, Visualização Funções Complexas

Abstract

This work presents an experience with complex functions visual interpretations from development of the software F(C). We will describe the use of the software through elaboration of activities and some experiences in Mathematics classrooms. Using Color Domain to represent some concepts that need 4 real variables is useful to represent this kind of graphics. We started activities with plots and undertanding of graphics. Explorations and plots of animations to study families of functions showed us the importance of this tool., because it allows us to have a generalization about each kind of function. Interpretation of function roots to solve problems and linear transformations were used in the activities, too. Finally we try to highlight the role of visualizations as basic tool in Mathematics Education, as well as the use of this kind of argument to justify the use of not formal demosntrations in this area.

Keywords: Educational Software, Complex Functions Visualization

* Parte desse projeto contou com o apoio da FUNDUNESP

INTRODUÇÃO

Muito se discute sobre o papel do uso de computadores em salas de aula. Porém, muito escasso seria o número de investigações que não se apóiem em visualizações promovidas pelas telas de computadores. Os cálculos efetuados pelos processadores, cada vez mais potentes, não seriam tão atrativos na aprendizagem quanto à utilização junto às representações gráficas. Isso porque a afinidade entre as simulações gráficas e o pensamento racional continua sendo fascinante.

Com esse propósito, planejamos e executamos um projeto baseado em desenvolvimento de software e atividades para o auxílio à representação visual em Análise Complexa em cursos presenciais de turmas de licenciandos em Matemática. Assim, relataremos nossas experiências e alguns resultados obtidos com as ferramentas desenvolvidas nesse projeto.

Iniciaremos por descrever os propósitos do projeto. Detalharemos, também, a problemática geradora dessa busca por representações visuais por computadores. Com isso, pretendemos situar o presente trabalho na problemática em que alunos e professores se deparam ao trabalhar conceitos de funções complexas.

O software, fruto desse projeto, será apresentado. Detalharemos as atividades propostas e realizadas, bem como os conceitos pertinentes ao uso do software e das atividades.

Pretendemos, ao final, lançar subsídios necessários para a discussão do papel da visualização e de outras formas de demonstrações (provas gráficas) na aprendizagem em Matemática. Principalmente ao se discutir a linguagem puramente simbólica e a dedução lógica como fontes não únicas e mutáveis no processo educativo.

O PROJETO

Estudar funções de uma variável complexa através de interpretações gráficas é uma tarefa que recentemente vem ganhando espaço devido exclusivamente ao uso de computadores. Isso se deve ao fato de que, ao trabalhar com tais funções, é necessária a manipulação de 2 (duas) variáveis complexas. Como cada variável complexa pode ser descrita através de 2 (duas) variáveis reais, manipula-se 4 (quatro) variáveis reais. Assim sendo, para representar graficamente funções de uma variável complexa pela forma cartesiana usual, faz-se necessária a utilização de 4 (quatro) eixos reais dispostos de tal forma que se possa compreender as relações entre eles (associando dimensão real a variável real). 2 (dois) eixos reais podem ser dispostos ortogonalmente para representar todos os pontos do plano euclidiano, da mesma forma que 3 (três) podem representar o espaço. Como nossa capacidade de representação é limitada e não concebemos dimensão real maior que 3 (três), fica impossível representar esses tipos de funções na forma cartesiana. Costuma-se estudar funções de uma variável complexa por suas partes, já que a forma cartesiana de representação é limitada.

Porém, a forma cartesiana de representação não é a única possível. Utilizando o que se denomina Domínio de Cores (Thaller, 2000 e Lundmark, 2004), detalhado mais adiante, podemos utilizar não só posições para representar variáveis reais (eixos), mas também tonalidades de cores. A combinação de posições (representação cartesiana) e cores (Domínio de Cores) se torna indispensável na representação completa de funções de uma variável complexa.

Qualquer representação gráfica exige cálculos, pois a construção do gráfico depende dos valores associados pela função. A precisão e a facilidade de manipulação de tonalidades de cores são muito bem obtidas pelos computadores atuais e muito inviáveis apenas com o uso de lápis e papel. Logo, a utilização de gráficos na Análise Complexa (parte da Matemática em que as funções de uma variável complexa são trabalhadas) está estritamente relacionada à necessidade de uso de computadores. Para isso, iniciamos o desenvolvimento do software chamado F(C): Funções Complexas (Silva e Souza, 2003a), apresentado mais adiante.

Entre Agosto de 2003 e Junho de 2004, realizamos investigações com professores e alunos regulares do curso de Licenciatura em Matemática da UNESP, campus de Bauru, com o intuito de pesquisar, explorar e elaborar atividades dirigidas, bem como iniciar a verificação, experimentação e validação do uso de novas tecnologias na Educação Matemática. Assim, dividimos o projeto nas seguintes fases: desenvolvimento de software, elaboração de atividades e verificações em salas de aula.

O desenvolvimento do software se iniciou no início do ano letivo de 2003, depois de um estudo criteriosamente dirigido sobre o uso de cores e posições para representar funções de uma variável complexa. Durante a realização das atividades propostas, a reengenharia foi necessária, já que o uso freqüente do software com professores e alunos sugeriu depurações, inclusões e modificações no software. Foi necessária, também, a utilização de algoritmos matemáticos adaptados para que pudéssemos obter representações consistentes e uniformes, com um grau aceitável de confiabilidade.

A linguagem de programação utilizada não necessitou de algoritmos sofisticados, porém tivemos que utilizar algumas técnicas de otimização para que o desempenho do software fosse o maior possível. A utilização de operações entre reais para representar operações com números complexos é um exemplo disso, já que o uso de números complexos requer muito mais capacidade de processamento e uso de memória se comparado a operações com números reais. Isto é, tivemos que reprogramar todas as operações utilizadas com números complexos para que as mesmas pudessem ser escritas através de operações com números reais na forma mais reduzida possível.

As atividades foram elaboradas com base em três tópicos fundamentais: estudo de raízes de uma função (zeros de funções), transformações lineares e análise de variação de coeficientes (famílias de funções). Em entrevista com professores e pesquisadores, esses tópicos se mostraram essenciais no estudo em Análise Complexa, e uma grande parte do tempo dentro do curso é dedicada a eles.

Um ponto notável que merece boa parte das atenções é destinado aos zeros de uma função. As resoluções de equações algébricas providas de problemas são exemplos de utilização.

Restringir o domínio de uma função para analisar a restrição do conjunto imagem (transformações lineares) é outro tópico de interesse. Com isso, é possível compreender a totatilidade de uma função através de estudos pormenorizados, ou seja, das partes é possível trilhar caminho para a compreensão do todo.

O estudo de variação de coeficientes permite a generalização do comportamento das funções. Saber o papel de um coeficiente numa determinada função é de extrema importância para a utilização em problemas. E para que haja essa generalização, passa-se pelo estudo de famílias de funções, ou seja, funções que se distinguem pela variação de um determinado coeficiente.

As verificações em salas de aulas eram, em parte, direcionadas a partir do propósito das atividades. Tentamos relacionar o comportamento algébrico de uma dada função com o seu respectivo gráfico gerado pelo software a fim de podermos obter certo grau de confiabilidade no software. Por outro lado, o papel das visualizações como mecanismo essencial no auxilio à aprendizagem através de gráficos (Guzmán, 2002) e o uso de demonstrações não formais (Garnica, 1995) na formação de licenciandos.

Com todas as investigações, estudos e intervenções realizados, pudemos traçar um perfil de professores e alunos utilizando tecnologia no auxílio ao ensino e à aprendizagem conceitual em Matemática e as perspectivas de tratamento dos temas frente a novas ferramentas computacionais. Foi possível, também, disponibilizar a ferramenta tecnológica, fruto desse projeto: o software F(C): Funções Complexas.

F(C): FUNÇÕES COMPLEXAS

Esse software foi desenvolvido por nós no Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência, da Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru entre o 1º semestre de 2003 e 2º semestre de 2004.

Dentre as características do software, podemos destacar: plotagem de gráficos, leituras dinâmicas, escolha de domínio de cores, estudo de transformações e geração de animações.

Na plotagem de gráficos, é possível gerar gráficos de diversos tipos de funções, tais como: polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, entre outras.

É possível interagir com o software, através do ponteiro do mouse, para que se obtenham relações em pontos específicos. As leituras dinâmicas permitem cálculos instantâneos de valores da função no ponto do plano ao qual são distribuídas cores. Isso é essencial no processo de estudo das funções por partes e essencial nas interpretações, já que as cores não dizem por si sós os significados a elas atribuídos.

O software utiliza dois tipos de mapas do Plano Complexo: colorido e monocromático. O colorido é baseado no desenvolvido por Thaller (2000) e distingue quaisquer dois números complexos (argumento e módulo). Com variações de uma única cor, temos dois mapas em escala de cinza: Mono1 (valorização do módulo do número complexo) e Mono2 (valorização do argumento). A utilização dos mapas monocromáticos é interessante em se tratando de percepções de características mais notáveis do gráfico, isto é, esses mapas enfatizam comportamentos em padrões bem separados. É possível analisar ora comportamentos de módulos (tendências de raízes, por exemplo), ora argumentos.

Através da janela transformações, podemos esboçar transformações lineares em dois planos distintos. A característica adicional dessa ferramenta, não presente no uso de papel e lápis, é levar em consideração não apenas as transformações obtidas, senão também as transformações sendo obtidas. Em outras palavras, se utilizamos um sentido específico na restrição do domínio (de e para), o sentido na transformação também será enfatizado.

Finalmente, a generalização das concepções sobre funções complexas através dos estudos de famílias de funções. Para isso, o software é capaz de gerar animações em vídeo com quadros com referência às variações determinadas de coeficientes. Assim, compreender o papel de certos coeficientes em uma determinada função fica possível verificando-se as variações dos gráficos obtidos (vídeo).

O software F(C): Funções Complexas pode ser obtido gratuitamente pelo endereço http://wwwp.fc.unesp.br/~edvaldo e informações detalhadas sobre a sua utilização estão disponíveis em http://wwwp.fc.unesp.br/~edvaldo/ajuda.

Apesar de termos descrito brevemente as

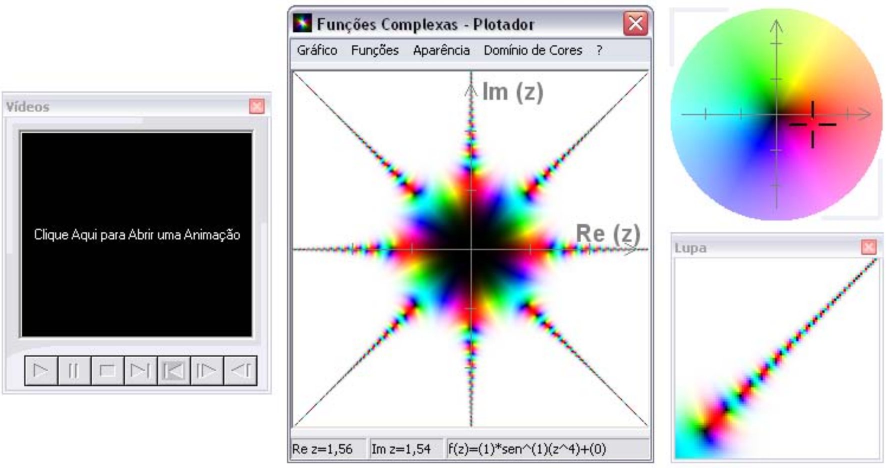

Figura 0 - Tela do software F(C): Funções Complexas

funcionalidades do software, detalharemos os aspectos principais utilizados nas atividades, destacando suas implicações educacionais.

DOMÍNIO DE CORES

Sem a noção de Domínio de Cores, a compreensão dos conceitos envolvidos, o acompanhamento das atividades propostas e a utilização do software ficam inviáveis.
Lundmark (2004) explicita claramente o que chamamos de Domínio de Cores (do inglês Domain Coloring ou Color Domain).
Dada uma distribuição de cores para o plano complexo, obtemos o gráfico da função de uma variável complexa a partir da correspondência da própria função pela distribuição de cores dada. Detalharemos com mais precisão.
Chamamos de Mapa do Plano Complexo uma distribuição de cores em que cada ponto do plano (cada número complexo) pode ser identificado por sua respectiva cor. Ilustraremos com a Figura 2 .

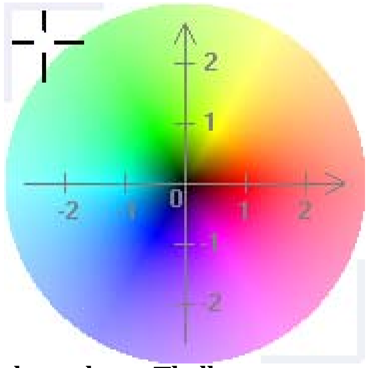

Figura
Complexo baseado em Thaller (2000)

Assim, ao referirmos ao número *1+0i* (ou a posição (1,0)), por exemplo, estaremos utilizando a cor vermelha na tonalidade em que distribuímos no Mapa. Para falar do número *0+0i* (ou a posição (0,0)), utilizaremos a cor preta, e assim por diante.
Esse tipo de associação será útil para a representação gráfica de funções devido principalmente ao aspecto dimensional que a variável ocupa na representação. Isto é, ao representarmos números reais, recorremos à reta geométrica, que ocupa 1 (uma) dimensão. Para números complexos, o plano euclidiano é a recorrência, ocupando 2 (duas) dimensões. No entanto, ao utilizarmos cores para representar pontos do plano, não precisamos de dimensão. Cor não ocupa lugar no espaço.
Vejamos como fica a representação gráfica de funções.
Seja $f{:}C \to C$ uma função complexa dada por $f(z)=w$. As variáveis z e w são complexas e necessitam de duas dimensões cada uma para serem representadas na forma cartesiana. A variável z será representada por posições e a w, por cores através do Mapa do Plano Complexo.
Exemplificaremos com a função $f(z)=-z$. A função recebe o valor z e retorna o valor $-z$. Alguns pontos da função podem ser vistos na Erro! Vínculo não válido..

z	*f(z)*
1+i	-1-i
2+i	-2-I
0	0
-1-2i	1+2i
-3+5i	3-51

Tabela 1 - Alguns valores de *f(z)=-z*

Para gerar o gráfico da função $f(z)=-z$, tomamos os valores de z como posições no gráfico e $f(z)$, como as cores dessas posições. Para saber as tonalidades de cada valor de $f(z)$, recorremos ao Mapa do Plano Complexo. Para a posição $(1{,}1)$, ou o número $1+i$, tomamos a cor que no Mapa tem referência ao ponto $(-1{,}-1)$, ou o número $-1-i$, e assim por diante.

ATIVIDADES PROPOSTAS

Elaborar atividades que possam usufruir a tecnologia de plotagem com cores requer experiências, até então desconhecidas. Ao discutir propostas de atividades para os encontros presenciais com turmas de licenciandos em Matemática, questões emergiram sobre como elaborar algo que pudesse, simultaneamente, apresentar as novas abordagens visuais e explorar os tradicionais estudos algébricos na análise complexa. Isso sem que esforços exagerados em abstrações, que nem sempre são alcançadas, fossem despendidos.

Discutimos, ao longo do período, com professores e pesquisadores da área sobre as possíveis potencialidades que o uso dessa ferramenta pode provocar.

Desse modo, o resultado obtido baseia-se, principalmente, em quarto aspectos essenciais: exploração de gráficos, generalização a partir de animações, busca de raízes e, transformações lineares.

EXPLORAÇÕES DE GRÁFICOS

As atividades mais elementares se referiam às gerações de gráficos. Para isso, as funcionalidades básicas do software F(C): Funções Complexas foram apresentadas.

O primeiro passo para as explorações se dá, obrigatoriamente, pela compreensão da idéia de Domínio de Cores. Para ler um gráfico utilizando recursos de cores é preciso que o significado de cores e posições possa estar claramente definido. Para isso, utilizamo-nos de porções de gráficos cujas variações de cores são pequenas a fim de introduzir o aluno ao exercício das leituras de gráficos.

Essa primeira etapa mostra ser a mais importante, visto que sem ela é impossível prosseguir na exploração dos conceitos em Análise Complexa.

O exercício de

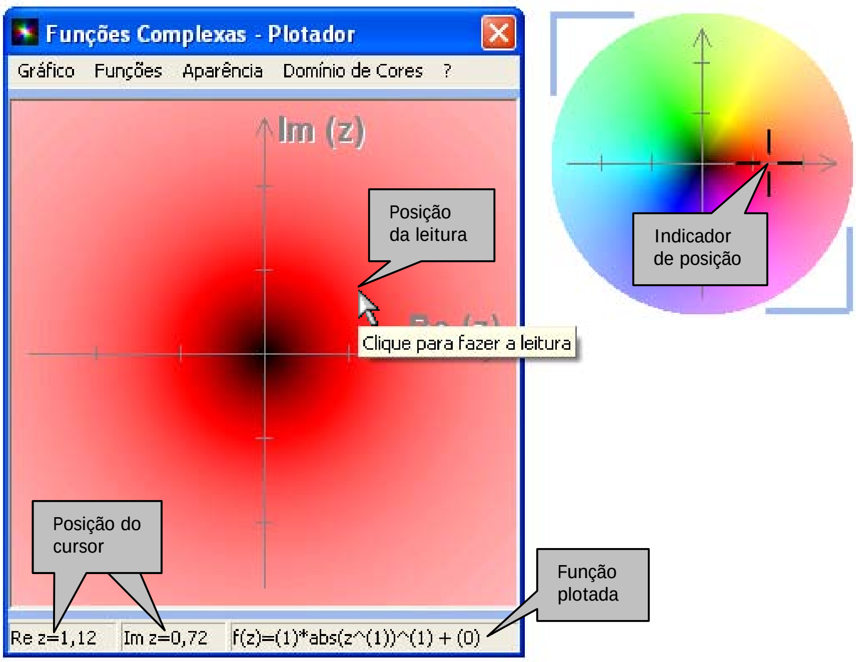

Figura 1 - Esquema de leituras dinâmicas

exploração de gráficos se complementa com o recurso de leituras dinâmicas presentes no software. Ao clicar numa região de um gráfico, instantaneamente o usuário pode perceber o valor numérico agregado à cor sob o ponteiro, através do indicador de posição no Mapa do Plano Complexo. Ou seja, se a posição do cursor já é um elemento numérico do conjunto domínio da função, a cor será a representação do elemento do conjunto imagem. Porém, para saber o valor numérico da cor, tal cor é procurada e apontada no Mapa, e a posição dessa cor no Mapa será o valor numérico do conjunto imagem da função. O Mapa funciona como uma espécie de legenda para os gráficos. Um esquema de leitura é mostrado na Figura 3.

Isto contribui para que a assimilação do significado das cores, até então pouco explorado, possa se tornar natural e as tonalidades presentes nos gráficos, familiares.

Ouvir dos alunos explicações das disposições das cores nos gráficos é uma maneira de verificar com estão sendo formadas as relações entre cores e seus significados. As relações entre posições e cores no gráfico devem estar sempre embasadas nas relações entre conjuntos da função estudada (domínio e imagem) e podem recorrer paulatinamente às tabelas de valores.

Dominada a leitura de gráficos, passamos a estudar o comportamento de funções.

Analisar as funções a partir das distribuições de cores passa a ser uma ponte essencial nas verificações algébricas. Nesse ponto, características intrínsecas a cada tipo de função são verificadas. Silva e Souza (2004) exploram alguns tipos de significados presentes em atividades desse tipo.

GENERALIZAÇÕES A PARTIR DE ANIMAÇÕES

O estudo de família de funções complexas tem mostrado, em consulta a professores e pesquisadores da área, ser de extrema importância que, por via exclusivamente algébrica, passa a ser de difícil acesso pelos estudantes.

Partindo dessa constatação, pensamos em uma ferramenta adicional capaz de facilitar e encorajar a exploração desse tópico.

Gerar vários gráficos, a partir da variação de um coeficiente específico da função e juntá-los em uma seqüência de vídeo, é o papel da ferramenta Animações, presente no software F(C): Funções Complexas.

Através disso, é possível caracterizar um determinado coeficiente de uma função estudada a partir do papel que esse coeficiente tem no gráfico, ou seja, pode-se variar um coeficiente e a variação do gráfico induzirá o usuário na relação possível entre coeficiente e função. Comparando às funções de uma variável real, podemos exemplificar: Para a função $f(x)=ax^2$, verificar os gráficos da função com valores distintos para a, pode levar a conclusões, inclusive, sobre a concavidade da função. Souza et al. (1999) estuda esses e outros tipos de relações.

Na Figura 4, apresentamos um exemplo, que no software é exibido no formato de vídeo.

Atividades abertas eram trabalhadas com alunos. Explicitar o que acontece com o gráfico a partir

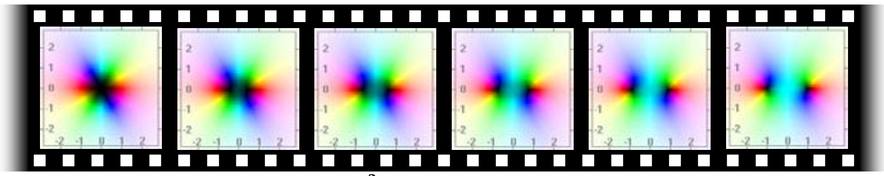

Figura 1 – *$f(z)=z^2-d$*, para *$d=0;1/5;2/5;3/5;4/5;1$*

da alteração da função e fazer demonstrações algébricas da propriedade era uma justificativa plausível para a resolução desses tipos de atividades. Aqui, abrem-se mais oportunidades de relações algébricas a partir de visualizações.

BUSCA DE RAÍZES

Pela disposição proposital de cores no Mapa do Plano Complexo, uma atenção especial é dada ao ponto (0,0) e sua vizinha.

Pelo Mapa baseado em Thaller (2000), tonalidades escuras são dispostas na vizinhança do ponto (0,0). O próprio ponto (0,0) tem cor preta.

Nesse tipo de disposição temos a possibilidade de observar tendências de preto como sendo prováveis convergências de raízes. Isso porque, se a cor é preta – representativa do ponto (0,0) no Mapa do Plano Complexo – então a posição *P* no gráfico a qual ela está associada é um elemento tal que *f(P)=0*, ou seja, uma raiz.
No entanto, podemos facilmente confundir o preto absoluto com as variações próximas a ele. Assim, os gráficos não têm o papel de fornecer valores exatos para as raízes, mas dar suporte para encontrá-la.

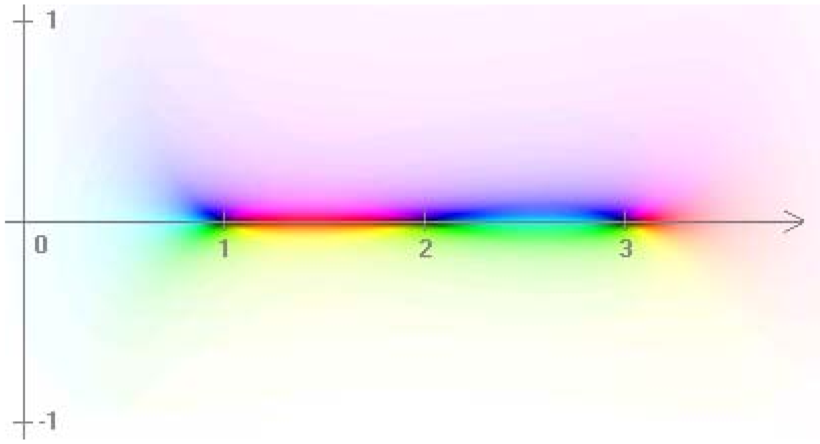

Figura 1 - Os pontos {(1,0);(2,0);(3,0)} sugerem soluções da equação **$(3z^2-12z+11)z-6z^2+22z-18=0$, pelas tonalidades escuras**

As atividades propostas constaram de buscas de raízes de funções elementares. Dada uma equação, a sua solução é buscada no gráfico da função que a suporta. Para as soluções triviais, bastava verificar as regiões e fazer as substituições para se verificar a resposta. Para os outros casos, os alunos eram levados a recorrer a manipulações algébricas sugeridas pelos gráficos. Tais sugestões partiam de variações de coeficientes da função (família) para verificar se havia relação direta entre coeficiente e raiz. Isso permitia a generalização de raízes para um grupo de funções.

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Analisar a restrição do domínio de uma função para se verificar a restrição causada no conjunto imagem é um mecanismo que permite, entre outras coisas, o conhecimento pormenorizado sobre a função.
Utilizando o software, obtêm-se as restrições instantaneamente. No entanto, a ponte entre as substituições algébricas e as manipulações com o mouse deve ser enfatizada. Isso porque as imprecisões causadas pela representação contribuem para o rigor nesses estudos. Uma circunferência visual pode ser na verdade, uma elipse de focos muito próximos, por exemplo.
Dávamos restrições no domínio e, utilizando as aproximações do software, os alunos tentavam verificar os resultados obtidos no sistema de equações (função e restrição) a fim de verificar ou não suas próprias manipulações algébricas.

A VISUALIZAÇÃO

Needham (2000) já demonstra preocupações para o fato de que os argumentos novos e acessíveis visualmente para explicar verdades na análise complexa elementar devem superar o domínio do pensamento lógico puramente simbólico. Principalmente pelo fato de que os apelos à intuição geométrica e visual freqüentemente são usados nos processos de descoberta e criação na Matemática.
A prova gráfica também tem sido discutida por Pineda et al. (2004). Os autores se apóiam ao fato de que uma prova em forma de diagrama pode ser mais facilmente aprendida e compreendida

para muitas pessoas do que se em notação puramente lógica. Assim, o papel da demonstração para o uso na aprendizagem é discutido em Garnica (1995) ao discorrer o que é prova rigorosa na formação de licenciandos. O uso de computadores nas provas em Matemática também é considerado.

Ao menos, estamos cientes de que a utilização de mecanismos puramente algébricos e lógicos não é suficiente para a aprendizagem. A busca por meios que possam estreitar o conhecimento da sua compreensão é o motivo pelos quais as visualizações têm tomado lugar, sem que certo rigor seja menosprezado.

A princípio, temos a visualização como suporte ao desenvolvimento simbólico, porém não como conseqüência da simbologia, senão como o ponto de partida e de maior importância na formação conceitual. O paralelo entre manipulação gráfica e simbólica deve ser vislumbrado como um primeiro passo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Graças às tecnologias disponíveis, podemos imaginar novas possibilidades de tratamento de conceitos já delimitados. Essas possibilidades parecem inúmeras, mas aos poucos podem ser exploradas.

A adoção dessas tecnologias na Educação tem mostrado cada vez mais o seu papel sem volta e que, a cada dia, nos faz repensar as formas usuais de tratamento do conhecimento (Borba, 1999). Essa nova mídia, além de promover maior acesso aos conceitos (pela proximidade na compreensão), difunde e refletem, sobre as próprias bases sócio-culturais que estão sendo estabelecidas, as diversas maneiras de conceber o conhecimento.

Outras maneiras de utilização desse tipo de tecnologia, bem como o modo de avaliação nessas atividades, deverão ser discutidas futuramente. Somente as experiências em salas de aula poderão afirmar a real necessidade suprimida pelas visualizações.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics** 52. 2003. p. 215-41.

ARNOLD, D. N. **Graphics for Complex Analysis**. http://www.ima.umn.edu /~arnold/complex.html. Maio. 2004.

BANCHOFF, T. E CERVONE, D. P. **Understanding Complex Function Graphs**. http://www.geom.umn.edu/~dpvc/CVM/1997/01/ucfg /welcome.htm. Maio. 2004.

BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento”. In Bicudo, Maria Aparecida Viggiani (org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: UNESP, 1999, p. 285-95.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica: Um Estudo sobre a Prova Rigorosa na Formação do Professor de Matemática** (Tese). Rio Claro. 1995.

GUZMÁN, M. **The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis**. In Proceeding of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics. Creta. 2002.

LUNDMARK, H. **Visualizing Complex Analytic Functions Using Domain Coloring**. http://www.mai.liu.se/~halun/complex/complex.html. Maio. 2004.

NEEDHAM, T. **Visual Complex Analysis**. Oxford University Press, 2000.

NOSS, R., HEALY, L e HOYLES, C. The Construction of Mathematical Meaning Connecting the Visual with the Symbolic. **Educational Studies in Mathematics 33**. 1997. p. 203-33.

PINEDA, L., LEE, J e GARZA, G. **Abstraction, Visualisation and Graphical Proofs**. http://leibniz.iimas.unam.mx/~luis/papers/pineda.pdf. Maio. 2004.

SILVA, E. L. e SOUZA, A. R. **Desenvolvimento de Software para Representação de Funções de uma Variável Complexa Utilizando Recursos de Cores**. XXVI CNMAC (Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional), IBILCE/UNESP. 2003a.

SILVA, E. L. E SOUZA, A. R. **Software for Functions of one Complex Variable Representations: Graphics using Colors**. XVI SIBGRAPI (Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagem), IME/USP. 2003b.

SILVA, E. L. E SOUZA, A. R. **Software para Estudos de Funções de uma Variável Complexa: Funções Elementares**. VIII ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática), UFPE. 2004.

SOUZA, A. R., PAULOVICH, L. e NASCIMENTO, M. C. Vértices de Famílias de Parábolas. **Revista do Professor de Matemática**, vol. 41. SBM. 1999.

THALLER, B. **Visual Quantum Mechanics**. New York: Springer-Verlag, 2000, p. 1-14.

WEBER, K. **Student Difficulty in Constructing Proofs**: The Need for Strategic Knowledge. Educational Studies in Mathematics 48. 2001. p. 101-19.