MODELAGEM MATEMÁTICA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS CIÊNCIAS COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

MATHEMATICAL MODELLING AND PROBLEMS RESOLUTION IN SCIENCES WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS

João Bosco Laudares

PUC Minas – Departamento de Matemática e Estatística – **matemática@pucminas.br**
CEFET / MG – Mestrado em Educação Tecnológica – **laudaresjb@dppg.cefetmg.br**

RESUMO

Este artigo objetiva apresentar o estudo de Equações Diferenciais em problemas ou modelagem nas ciências. No Cálculo Diferencial e Integral, as Equações Diferenciais se apresentam como objeto privilegiado para o estudo dos fenômenos físicos, quanto a sua interpretação e avaliação, com as noções de "taxa de variação". Para buscar estratégias de motivação e envolvimento dos estudantes no curso, procuro a inserção da matemática no estudo das ciências, a contemplar a interdisciplinaridade e a contextualização, através da resolução de problemas e uma introdução à modelagem. Apresenta uma investigação da prática educativa do autor em cursos de engenharia ao trabalhar a interdisciplinaridade entre as ciências e a matemática.

Palavras-chave: Modelagem matemática, ciências, resolução de problemas, equações diferenciais.

ABSTRACT

This papaer aims to present a differential equations study in problems, or in Science modelling. The differential equations, according to its interpretations and evaluation, are reported as a privileged object to the physical phenomena's study with notions of "variation tax". In search of motivations strategies to increase the involvement of the students, the mathematical insertion in the Sciences study is required in the context through problems resolution and an introduction to the mathematical modelling. Thus, presenting an investigation of the author educative practice in engineering courses through the work in the discipline's integration among Sciences and Mathematics.

KEYWORDS: Mathematical modelling, Sciences, problems resolution, differential equations.

1. INTRODUÇÃO

Este artigo objetiva apresentar questões de investigação da prática educativa do ensino de Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Engenharia. Tenho sido um professor/investigador da minha própria didática com intuito de estar refletindo sobre o meu desenvolvimento docente nos seus três níveis estruturais: planejamento, atividade e avaliação.

Para buscar estratégias de motivação e envolvimento dos estudantes no curso, procuro a inserção da matemática no estudo das ciências, a contemplar a interdisciplinaridade e a contextualização, através da resolução de problemas e uma introdução à modelagem.

Diferentes abordagens foram realizadas e têm sido utilizadas à busca incessante da efetividade dos processos de aprendizagem. Parto do princípio da instrumentação da matemática, como recurso básico do construto conceitual das ciências físicas, químicas, biológicas, econômicas e sociais, a partir da definição advinda do quantitativo, como seu elemento definidor epistemológico. A ciência se faz na interação e confluência da análise qualitativa/ quantitativa.

No Cálculo Diferencial e Integral, as Equações Diferenciais se apresentam como objeto privilegiado para o estudo dos fenômenos físicos, quanto a sua interpretação e avaliação, com as noções de "taxa de variação". Já "o coeficiente angular da reta tangente a uma curva", com aplicação no estudo das trajetórias ortogonais, pode representar as linhas de forças de campos eletrostáticos, pois são ortogonais às linhas de potencial constante e também as linhas de fluxo em aerodinâmica, que são trajetórias às curvas de velocidade equipotenciais (exemplos dados por James Stewart em seu livro de Cálculo, vol II, pág. 598).

A metodologia do ensino de matemática tem 3 (três) pilares básicos: a compreensão conceitual, a operacionalização ou algoritmação e a aplicação.

Quanto ao entendimento dos conceitos, no estudo de Equações Diferenciais, é necessária a compreensão e o domínio de dois deles, principalmente, o de derivada, como taxa de variação, e o de integral, como operação inversa da diferenciação.

2. OPERACIONALIZAÇÃO OU ALGORITMAÇÃO

A tensão entre o qualitativo e o quantitativo tem sido elemento de discussão entre os educadores matemáticos e os educadores em ciências, continuamente. A dialética da aprendizagem de conceito e da manipulação de fórmulas com resolução de cálculos de forma mecânica, repetitiva tem trazido à discussão a efetividade do ensino de matemática.

Assim, é estabelecido um conflito dentro do campo de forças do corpo docente na execução do currículo, ora com adeptos à algebrização, ora os defensores de menos álgebra, menos algoritmação e, mais aplicação na exploração conceitual pela forma de interpretação gráfica, formulação e análise de problemas, com contextualização e interdisciplinaridade.

Segundo, PEGGY A. HOUSE (1995: 2) "em muitas salas de aula, os alunos continuam sendo treinados para armazenar informação e para desenvolver a competência no desempenho de manipulações algorítmicas". A algoritmação é realizada ao executar, no estudo de matemática, os exercícios. O "exercício" objetiva a aplicação ou desenvolvimento de fórmulas ou modelos matemáticos, de forma repetitiva, ao variar valores de parâmetros e variáveis com a mesma expressão, equação, inequação ou função. Trata-se da manipulação algébrica para a retenção de um processo de cálculo.

Nesta fase da aprendizagem, a competência a ser adquirida é do treinamento com o pensar logicamente. Isto é, a resolução da Equação Diferencial, de uma forma conexa, analiticamente descrevendo e explicando passo a passo. Nesta fase da aprendizagem é fundamental o pré-requisito das técnicas de derivação, diferenciação e integração.

Apesar de se defender o uso do software para a busca da solução, não há como desprezar a algoritmação no estudo das Equações Diferenciais, pois o engenheiro necessita criar e manipular algoritmos matemáticos, por ser um profissional da área das ciências exatas.

O processo mais comum é a da variação de parâmetros e da mudança de variáveis, que trazem sempre o retorno aos processos já conhecidos, numa cadeia ou rede de etapas conexas e integradas.

O reconhecimento do tipo de equação a ser estudada facilita o uso do algoritmo correto. Assim, hoje, com a mudança paradigmática da ciência e da tecnologia na interpretação do fenômeno, via teoria da complexidade, na interação e na não linearidade, se traz o enfoque às equações não lineares. Estas equações remetem os estudos à exploração de novos algoritmos, pois seu comportamento matemático foge da padronização de modelos e pede, então, muitas vezes soluções numéricas, ou aproximações, em substituição às soluções algébricas.

3. FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A meta principal do ensino de matemática é a focalização na compreensão conceitual. Daí uma ênfase a ser dada nas estratégias de estudo a qual se faz com abordagens descritivas, explicativas e de análise com diversidade de metodologias do tipo algébrica, numérica, geométrica. Uma outra ênfase se faz no tratamento do conceito matemático atrelado à situações problemáticas das ciências, da realidade, da concretude fugindo da abstração restrita e, finalmente, no desenvolvimento das habilidades dos estudantes de problematizar em contexto, para não se limitar a formalização matemática.

A maioria dos conceitos matemáticos, historicamente, foram elaborados a partir de demandas surgidas em situações problemáticas das ciências e da tecnologia.

POLYA (1994) defende a necessidade do raciocínio heurístico, o qual se faz com suporte em todo capital acumulado de saberes e da sua mobilização, formulando hipóteses e conjecturas. É aquele, segundo o mesmo autor, que não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível.

> *"À medida que avança o nosso exame do problema, prevemos com clareza cada vez maior o que deve ser feito para sua resolução e como isso deve ser feito. Ao resolvermos um problema matemático, podemos prever, se tivermos sorte, que um certo teorema conhecido poderá ser utilizado, que um certo problema já anteriormente resolvido poderá ser útil, que a volta à definição de um certo técnico poderá ser necessária. Não prevemos essas coisas com certeza, apenas com um certo grau de plausibilidade. Teremos a certeza absoluta quando obtivermos a solução completa, mas antes de termos a certeza absoluta precisamos, muitas vezes, de nos contentar com uma suposição mais ou menos plausível. Sem considerações que sejam apenas plausíveis e provisórias jamais encontraremos a solução, que é certa e final". (POLYA, 1994: 130).*

Na formulação do problema volta-se às definições, aos conceitos utilizando-se analogias, metáforas, generalização, particularização, decomposição, recombinações e induções.

POLYA (1994) defende a "variação do problema", a qual pode trazer elementos auxiliares ou à descoberta de um problema auxiliar mais acessível ou a um já conhecido.

A iniciação na metodologia de resolução de problemas exige um acúmulo de conhecimentos, denominada por POZO (1998) de conhecimentos prévios,

> *"entendemos que conhecimentos prévios são todos aqueles conhecimentos (corretos ou incorretos) que cada sujeito possui e que adquiriu ao longo de sua vida na interação com o mundo que o cerca e com a escola. Esse conjunto de conhecimentos serve para que ele conheça o mundo e os fenômenos que observa, ao mesmo tempo em que o ajudam a prever e controlar os fatos e acontecimentos futuros". (POZO, 1998:87).*

O conteúdo do problema e sua resolução exigem saberes conceituais e procedimentais, bem como sua interação e ativação em contexto. O mesmo autor classifica os problemas em 3 (três) tipos: problemas da vida cotidiana, problemas científicos e problemas escolares.

Por problemas da "vida cotidiana" podemos entender aqueles enfrentados na vida social e profissional. Num curso de engenharia prevalecem os problemas da tecnologia e do exercício profissional.

Já os problemas escolares são aqueles originados fora da escola, traduzidos e transpostos para o ambiente educacional, que podem ser simulados com condições diferentes ou próximas das reais, a partir das dificuldades de se levar muitas vezes à sala de aula ou ao laboratório a real situação em estudo.

Outra classificação dos problemas dada por POZO (1998), é a que se refere ao tratamento das informações e dados na sua natureza descritivo-analítica. Isto é, problema qualitativo ou qualitativo.

> *"São denominados problemas qualitativos aqueles que os alunos precisam resolver através de raciocínios teóricos, baseados nos seus conhecimentos, sem necessidade de apoiar-se em cálculos numéricos e que não requerem para a sua solução a realização de experiência ou de manipulações experimentais. São geralmente problemas abertos, nos quais se deve predizer ou explicar um fato, analisar situações cotidianas ou científicas e interpreta-las a partir dos conhecimentos pessoais e/ou modelo conceitual proporcionado pela ciência".*
>
> *"Entendemos por problema quantitativo aquele no qual o aluno deve manipular dados numéricos e trabalhar com eles para chegar a uma solução, seja ela numérica ou não. São problemas nos quais a informação recebida é principalmente quantitativa, embora o resultado possa não sê-lo. Por isso, a estratégia de resolução estará fundamentalmente baseada no cálculo matemático, na comparação de dados e na utilização de fórmulas". (POZO, 1998: 78 – 80).*

Nas Equações Diferenciais, os problemas são quantitativos, mas que exigem uma análise e avaliação qualitativas, pois sua resolução e solução não são definidas apenas pelo modelo matemático. A interpretação das condições iniciais e de contorno ao fenômeno guardam uma demanda inerente a natureza do acontecimento, as quais vão caracterizar a lei matemática (fórmula ou modelo) que modela o fenômeno, implicado na situação problemática em estudo.

A importância fundamental das Equações Diferenciais se refere a resolução dos problemas da natureza, que são formulados pela Matemática através do conceito do Cálculo Diferencial e Integral, ao se utilizar da "taxa de variação" pela derivação ou diferenciação.

A metodologia para resolução de problemas nos cursos de Equações Diferenciais pode ser conduzida, pelos passos seguintes:

1º. Leitura do problema
2º. Verbalização do enunciado
3º. Declaração ou definição de variáveis
4º. Identificação da relação das variáveis (dependência e independência)
5º. Identificação dos conceitos e modelos matemáticos adequados
6º. Montagem da equação diferencial
7º. Identificação das condições iniciais e de contorno
8º. Determinação do formato da solução (o que o problema pede)
9º. Resolução da equação diferencial
10º. Análise e crítica da solução pela "lei" (fórmula matemática) ou pelo gráfico

Destacam-se dois passos, que representam dois momentos relevantes nos problemas das ciências, com Equações Diferenciais: (1) a identificação e interpretação das condições iniciais (o zerar o cronômetro: $t = 0$), as condições de contorno (tomadas depois do momento inicial, isto é, para o tempo maior que zero: $t > 0$); (2) a análise da solução geral das Equações Diferenciais a qual na sua "inderteminação" (pela existência da constante de integração) é imprópria para representar a "lei física". A solução particular é determinada ao considerar valores dados das condições iniciais e de contorno. E o último passo na solução de problema é a compatibilização a ser feita dos dados apresentados com a solução encontrada, e uma avaliação relacional enriquecida, pelo traçado do gráfico da lei matemática encontrada na constatação da coerência das grandezas envolvidas e do comportamento das variáveis de acordo com os parâmetros definidores e limitadores dos domínios em estudo.

4. Iniciação à Modelagem

A modelagem é de uma maneira geral um processo na obtenção de um modelo. Modelar é uma ação inerente a todas as áreas das ciências sociais, humanas, exatas, biológicas e da tecnologia.

O modelo pode ser uma imagem construída mentalmente, buscando expressar uma generalização, relacionando com algo já conhecido, efetuando deduções. Mas, o modelo matemático, segundo BASSANEZI (2002:20), é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.

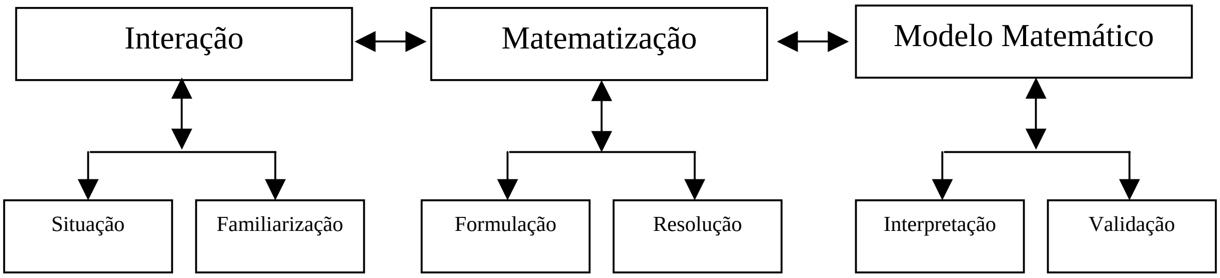
O mesmo autor, afirma que

> *"Os modelos matemáticos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e classificados conforme o tipo de matemática utilizada:*
>
> *i. Linear ou não-linear, conforme suas equações básicas tenham estas características;*
>
> *ii. Estático, quando representa a forma do objeto – por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo; ou dinâmico quando simula variações de estágios do fenômeno – por exemplo, crescimento populacional de uma colméia.*
>
> *iii. Educacional, quando é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, tendo, quase sempre, soluções analíticas. O método empregado por tais modelos envolve fenomenológicas. Geralmente estes modelos não representam a realidade com o grau de fidelidade adequada para se fazer previsões. Entretanto, a virtude de tais modelos está na aquisição de experiência e no fornecimento de*

idéias para a formulação de modelos mais adequados à realidade estudada". (BASSANEZI, 2002: 20).

BASSANEZI, define modelagem matemática como um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos, sendo uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências.

Já BIEMBENGUT (1999), apresenta os procedimentos para elaborar um modelo, isto é, representar uma situação real com ferramental matemático, a partir de 3 (três) etapas, o que pode segundo a mesma autora ser entendido pelo diagrama abaixo:



Fonte: BIEMBENGUT (1999: 23)

Não é tarefa fácil implementar modelagem no processo ensino-aprendizagem, o que requer do professor ousadia (FREIRE, 1998) e audácia (BIEMBENGUT, 1999) na experimentação de novas práticas educativas. Parte-se de estudo de modelagem de problemas clássicos, para em seguida elaborar alguns modelos simples introduzindo os estudantes à essa prática.

"Utilizar modelagem matemática no ensino, como já expus anteriormente implica, necessariamente, levar os alunos a escolherem um tema, fazer com que eles levantem questões e, posteriormente, matematizem-nas, ou seja, traduzam as questões em linguagem matemática até chegar a um modelo (fórmula, tabela, gráfico, etc.)". (BIEMBEGUT, 1999: 42).

No estudo de Equações Diferenciais pode-se diferenciar as duas práticas metodológicas: de resolução de problemas e da modelagem.

Resolver um problema com Equações Diferenciais, trata-se de dar solução a uma situação nas Ciências ou em Matemática, especialmente na Geometria, na qual se tem um enunciado contendo uma "lei" descrita e verbalizada, com dados.

A primeira dificuldade é matematizar a situação, através da utilização da "taxa de variação" em problemas das ciências ou da derivada num ponto como "coeficiente angular da reta tangente" e, conseqüentemente, a formulação de uma Equação Diferencial a expressar matematicamente o problema. A diferença de um problema para um outro se faz variando-se a "lei" e os "dados", bem como a forma da solução.

Já a modelagem é uma ação mais heurística, inquiridora, investigativa a requerer mais criatividade e iniciativa do estudante. A situação está posta, mas não há uma "lei" expressa, a modelagem é o processo da busca e elaboração desta lei e da determinação das condições iniciais e de contorno.

Uma iniciação à modelagem pode ser trabalhada, através de modelos clássicos, como a seguir, quando se deseja o estudo e análise de um fenômeno, na interpretação gráfica do comportamento das variáveis envolvidas e a elaboração de uma Equação Diferencial, como expressão matematizada do fenômeno.

Três exemplos de iniciação à modelagem são apresentados a seguir.

ATIVIDADE INVESTIGATIVA: Introdução à Modelagem nas Ciências.

1ª Questão: Resfriamento de um corpo.

a) Consideremos um ambiente mantido a uma temperatura constante durante todo o tempo de uma experiência (denominada temperatura ambiente);
b) Tomemos um "corpo de prova" e o levemos a um forno a uma temperatura dez vezes a temperatura do ambiente do primeiro item;
c) Introduzimos este "corpo de prova" no ambiente preparado;
d) A partir deste instante, (zerar o cronômetro). Iniciar uma observação do fenômeno físico a se desenvolver.

Responda as seguintes indagações (baseando-se em seus conhecimentos da **Física**, da sua **intuição** ou faça **conjecturas**):

I) Descreva o acontecimento do fenômeno a partir da introdução do corpo no ambiente preparado;
II) Quais são as variáveis e os invariantes a declarar?
III) Como podemos formular uma relação entre as variáveis?
IV) Que formulação matemática pode-se fazer?
V) Que tipo de "taxa" relacionada à variação observada pode ser expressa matematicamente, (lembrar "taxa" ou razão média num ponto (ou instantânea): a derivada);
VI) Suponha que o "corpo de prova" tenha sido levado ao invés de um "forno" num "refrigerador", e depois introduzido no ambiente preparado, o que acontecerá em relação a primeira experiência?
VII) Faça sua análise em 3(três) momentos:
  - **Inicial** (Quais são as condições iniciais?)
  - **Durante o desenvolvimento**
  - **Final** (Isto é uma tendência do comportamento das variáveis, quando o tempo cresce).
VIII) Relacionando duas variáveis do fenômeno em observação, tente esboçar um gráfico, que retrate o fenômeno;
IX) O gráfico vai ser o mesmo nas duas experiências? Se for diferente trace os dois.
X) Na sua opinião que função matemática representa melhor o fenômeno?
XI) Elabore um "**problema**", considerando a situação em estudo, com dados determinados por você e dê a solução.

2ª Questão: Movimento de uma mola.

a) Consideremos uma mola presa a um suporte com um corpo na sua extremidade (faça um "desenho" desta situação).
b) Tiremos a mola do repouso imprimindo uma força ao corpo que está na sua extremidade, então, a mola deixa sua posição de repouso.
c) Responda as seguintes indagações (baseando-se nos seus conhecimentos de **Física**, de sua **intuição** ou faça **conjecturas**):

  I) A partir do impulsionamento desprezando qualquer força externa (resistência do ar, ou atrito), descreva o fenômeno que está acontecendo.
  II) Quais são as variáveis e invariantes a declarar?

III) Como podemos formular uma relação entre as variáveis?
IV) Que formulação matemática pode-se fazer?
V) Que tipo de "taxa" relacionada à variação observada pode ser expressa matematicamente, (lembrar "taxa" ou razão média num ponto (ou instantânea): a derivada);
VI) Relacionando as variáveis, tente esboçar um gráfico, que retrate o fenômeno.
VII) Na sua opinião, que função matemática retrata melhor o fenômeno.

3ª Questão: Crescimento Populacional

a) Consideremos uma população (de bactérias, animais ou humanas) imune a doenças, ausência de predadores e com nutrição adequada.
b) Estudemos sua evolução.

Responda as seguintes indagações (baseando-se em seus conhecimentos da **Biologia**, **Física-Química**, da sua **intuição** ou faça **conjecturas**):

I) Como a população se desenvolve, descreva o fenômeno;
II) Quais são as variáveis e invariantes a declarar?
III) Como podemos formular uma relação entre as variáveis?
IV) Que formulação matemática pode-se fazer?
V) Que tipo de "taxa" relacionada à variação observada pode ser expressa matematicamente, (lembrar "taxa" ou razão média num ponto (ou instantânea): a derivada);
VI) Faça uma análise em 3(três) momentos:
   - **Inicial** (Quais são as condições iniciais?).
   - **Durante a evolução**
   - **Final** (Qual é a tendência da evolução?).
VII) Relacionando as variáveis, tente esboçar um gráfico, que retrate o fenômeno.
VIII) Na sua opinião, que função matemática retrata melhor o fenômeno?
IX) Elabore um "problema" com dados determinados por você e dê a solução.

5. CONCLUSÃO

A iniciação à modelagem pode ser efetivada com sucesso a partir de dois caminhos:
- resolução de problemas,
- modelagem de fenômenos clássicos.

O auxílio do professor será fundamental na apresentação do fenômeno ou do evento através de questionamentos e elaboração de perguntas, os quais contornam a essência da situação em estudo, pois modelar é uma ação investigativa, a qual tem a pergunta como princípio básico. O direcionamento do professor é questionar o estudante diante da situação proposta, como forma de aprendizagem.

Para facilitar o iniciante à modelagem, inicialmente tenta-se aproximação ao modelo requerido, por composição de uma tabela numérica ou do esboço de um gráfico, para depois construir uma fórmula algébrica: ou uma equação ou uma função. A análise criteriosa da validação do modelo é essencial para sua aceitação.

O estudo de Equações Diferenciais poderá ser eficaz se explorado pelos três enfoques: da algoritmação (resolução das equações); da resolução de problemas e da iniciação à modelagem. Certamente, o estudante ficará mais motivado, pois será instigado a trabalhar os conceitos matemáticos, relacionados à realidade, às ciências em constante reflexão, não se restringindo somente aos cálculos algébricos. Mas, os cálculos algébricos podem ser valorizados quando a algoritmação é conduzida como processo a desenvolver habilidades de cálculo, e não como tarefa apenas repetitiva para treinamento de algebrismo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bassanezi, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

Biembengut, Maria Salett. **Modelagem matemática & implicações no ensino-aprendizagem de matemática.** Blumenau: Ed.da Furb, 1999.

Freire, Paulo. **Medo e Ousadia:** o cotidiano do professor. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1998.

House, S; Peggy, A. Álgebra: idéias e questões. IN: COXFORD, Arthur; SHULTE, Albert (orgs.). **As idéias da Álgebra.** São Paulo, Atual, 1995. pág.1-8.

Polya, George. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

Pozo Municio, Juan Ignácio. **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1998.